

CNAM 2002-2003

1 - Cadre contractuel et comptable de l'opération d'assurance

1.1 Le risque préexistant; sa couverture contractuelle

1-1-1: la crainte du risque et les moyens de s'en protéger.

Il y a une demande d'assurance parce que des agents économiques (individus ou entreprises) sont soumis à des aléas dont ils ne peuvent supporter facilement les conséquences financières; leurs fortunes ou leurs fonds propres disponibles seraient même dans certains cas insuffisants pour faire face à ces événements.

Certains ont conscience de ces "risques" et cherchent à s'en préserver en faisant supporter par d'autres les circonstances dommageables; l'aversion au risque" désigne cette crainte spontanée, la théorie de l'utilité espérée de Von Neumann&Morgenstein¹ étant le cadre théorique dans lequel s'effectue souvent la modélisation. Nous en donnerons un aperçu plus loin au point numéro 4.

D'autres agents pourraient avoir un comportement plus insouciant, en considérant que les événements dommageables sont improbables, mais des tiers concernés par leur situation financière, comme par exemple leurs banquiers, peuvent exiger d'eux des garanties. Enfin la puissance publique peut estimer que certains risques graves d'insolvabilité entraînent des désordres sociaux qui légitiment une exigence de garanties; un exemple bien connu est l'obligation pour un conducteur de véhicule automobile d'être assuré en responsabilité civile, c'est à dire d'avoir la garantie que les dommages qu'il pourrait occasionner à autrui seront pris en charge par un organisme solvable.

L'opération d'assurance a un objet universel. Elle vise en effet le transfert de tout ou partie des conséquences financières du risque subi par l'assuré vers une société d'assurance, dans les conditions et circonstances précisées par un contrat. Les dépenses prises en charge peuvent correspondre soit à des indemnités à verser à des tiers, au titre de la responsabilité de l'assuré, soit à la réparation de dommages subis par celui-ci. Il est à noter que c'est une entreprise spécialisée, et non pas un individu, qui donne une garantie d'assurance; ce principe est inscrit dans la législation et il y a des raisons profondes à cela, que nous approfondirons plus loin, au point numéro 3. Ainsi l'opération d'assurance se distingue fondamentalement d'un pari entre deux individus ou d'une spéculation financière occasionnelle. Elle implique forcément une société d'assurance qui accumule les risques qu'elle a accepté de prendre en charge et qui, de ce fait, court elle même un risque d'insolvabilité.

¹ John Von Neumann (1903-1957), mathématicien, et Oskar Morgenstern (1902-1977), économiste, ont exposé dans *Theory of games and economic behavior* (1944) les fondements de la théorie des jeux.

Le risque qui pourrait être assuré se traduit par des dommages évalués en termes monétaires (en francs ou en devises, demain en euro). Ces chiffres sont incertains et varient selon les circonstances. Le mode de description opérationnel de cet ensemble d'éventualités et du lien avec la valeur des dommages est le calcul des probabilités. On verra précisément ceci au point numéro 2.

1-1-2: le contrat:

Il s'agit d'un accord passé entre, d'une part une entreprise d'assurances, que nous qualifierons désormais d'*assureur*, et d'autre part un *souscripteur* (individu ou collectivité), fixant à l'avance, pour une période déterminée, des échanges financiers en fonction d'un ensemble bien défini d'événements aléatoires.

Le risque supporté ou défini par l'*assuré* peut être totalement ou partiellement transféré à l'assureur à partir de règles préalablement définies dans le contrat.

Du point de vue de l'actuaire deux particularités de l'assurance "dommages" sont essentielles:

- a) l'existence de dispositifs contractuels limitant la prise en charge du risque par l'assureur;
- b) le fait que bien souvent le sinistre survenu et déclaré n'est pas connu précisément.

La première particularité s'exprime par des limitations de garantie et par des franchises.

La seconde implique une grande importance dans certaines branches des provisions pour sinistres à payer. L'évaluation des sinistres (une prévision du passé !) est dans le domaine de la responsabilité civile, au plan de chaque dossier, une affaire de juriste, car les questions de responsabilité et la connaissance de la jurisprudence y sont essentielles. Les dommages matériels sont pour chaque sinistre de la compétence d'experts. Mais au plan collectif il existe des régularités statistiques qui font que l'intervention actuarielle devient nécessaire.

1.2 Les règles comptables

1 - 2.1 : Les principes généraux de la description comptable

Comme pour la plupart des activités l'information la plus riche et la plus fiable est d'origine comptable, pourvu que la comptabilité réponde à des normes largement répandues et qu'elle s'attache à fournir une "image fidèle" de l'entreprise concernée.

La première condition, indispensable si on veut que les comptes soient lisibles par tous et qu'ils soient comparables, est assez bien vérifiée en France, puisqu'il existe un plan comptable obligatoire, dont la dernière version applicable au 1er janvier 1995 est conforme à une directive européenne. Néanmoins les normes adoptées ne sont pas universelles et il existe par exemple aux Etats-Unis des principes différents.

En ce qui concerne l'objectif de restitution d'une image fidèle, il faut retenir que l'assurance a une comptabilité de "droits constatés", ce qui veut dire qu'elle enregistre dès leur naissance les engagements donnés, et qu'au surplus elle doit pouvoir montrer que l'assureur est en état de faire face à ces promesses.

La nature aléatoire des engagements de l'assureur, ainsi que leur durée parfois très longue, sont deux caractéristiques très gênantes pour arrêter des chiffres comptables.

Il est facile d'enregistrer le montant d'un paiement effectué; c'est un problème beaucoup plus complexe que d'évaluer des paiements futurs lorsque l'éventualité qui les provoquera est incertaine, et que les montants sont entachés d'aléas. La solution générale consiste alors à ne pas chercher à évaluer séparément chaque engagement donné, mais à tenir compte du fonctionnement collectif de l'assurance en décrivant plutôt la mutualité. Le chiffrage n'est plus une opération comptable classique; il est de la compétence des actuaires.

Lorsqu'on veut administrer la preuve comptable que les engagements seront tenus, notamment pour des opérations qui mettront des années à se dénouer, il faut pouvoir anticiper à la fois les charges futures et les recettes futures. Là encore des techniques actuarielles doivent être utilisées, avec un souci de prudence et une nécessité de transparence pour le choix des hypothèses. La difficulté de la tâche et sa technicité peu accessible à une compréhension immédiate impliquent des vérifications par des spécialistes; c'est une des raisons fondamentales de l'intervention d'un contrôle, sous la surveillance de l'Etat.

Voyons maintenant successivement les éléments principaux du bilan et du compte de résultats.

le bilan

Un bilan fournit à une date bien précise, traditionnellement le 31 décembre, d'une part l'inventaire des avoirs qui constituent l'actif, et d'autre part, au passif, les dettes et l'évaluation des engagements. La différence, normalement positive, entre les avoirs et les dettes ou engagements, apparaît au passif sous l'appellation de fonds propres, comme dans l'exemple suivant.

ACTIF (AVOIRS)		PASSIF(FONDS PROPRES ET PASSIF ENGAGE)	
Placements	95	Fonds propres	8
Autres actifs	5	Provisions techniques	80
		Dettes	12
Total	100	Total	100

L'actif:

Pour l'évaluation des divers éléments d'actif plusieurs conceptions s'affrontent et ne conduisent pas aux mêmes chiffres.

L'approche comptable traditionnelle est de se référer à la valeur historique, c'est à dire au prix d'achat ou de revient; elle présente l'avantage de ne pas prêter à discussion, mais elle a le grand inconvénient de ne pas suivre l'évolution des marchés, et encore moins de l'anticiper. Toutefois, en

moyenne, lorsque l'achat est ancien, on est en droit de penser que le prix de vente des actifs sera supérieur à leur valeur comptable, dans la mesure où sur longue période ils vont s'apprécier.

Le mode d'évaluation retenu par la réglementation française est principalement le prix de revient, mais avec quelques corrections pour tenir compte de la baisse éventuelle des valeurs de marché.

Le passif engagé:

Une dette est habituellement de montant certain et son échéance est fixée. Dans un tel cas son enregistrement au bilan ne pose pas de problème insurmontable pour un comptable classique. Dans le cas des engagements aléatoires des assureurs on enregistre des provisions techniques dont l'évaluation requiert le recours à des techniques actuarielles. Elles constituent la partie essentielle du passif: environ 85% du total du bilan pour les sociétés d'assurance-vie et près de 70% pour les sociétés non-vie.

Deux types principaux de provisions doivent être distinguées: celles qui concernent des garanties en cours pour lesquelles les sinistres ne se sont pas encore révélés, et les provisions correspondantes à des sinistres survenus mais non encore payés. Les premières ont d'autant plus d'importance que la période de garantie est longue; elles dominent en assurance vie. En assurance non-vie ce sont les provisions pour sinistres à payer qui ont le poids essentiel parce que la détermination du montant des indemnisations peut être lente et complexe.

Les fonds propres:

Leur niveau relatif est un bon indicateur de la santé de l'entreprise, pourvu que ce chiffre soit indiscutable. D'ailleurs ils constituent l'essentiel de la marge de solvabilité réglementaire.

Si l'on observe que les fonds propres sont la différence entre, d'une part l'actif réel, et d'autre part le passif engagé, on doit s'attendre à ce que leur niveau soit très dépendant des principes d'estimation des deux termes et de la qualité des chiffrements. Dans l'exemple qu'illustre le tableau précédent, les fonds propres constituent apparemment 10% des provisions techniques.

La sensibilité de ce pourcentage aux évaluations est considérable:

si on envisage de réviser en baisse de 5% l'estimation de l'actif (-4,75) et de réévaluer en hausse de 5% les provisions (+ 4), les fonds propres deviendraient négatifs de $8-4-4,75=-0,75$, et on devrait constater que l'entreprise n'est plus en état de fonctionner.

le compte de résultats

Il s'agit d'une liste de produits et de charges permettant d'analyser l'activité de l'entreprise entre deux bilans successifs. Nous allons voir que ce ne sont pas forcément des mouvements de trésorerie (des recettes et des dépenses) qui figurent dans cette liste et que les chiffres retenus sont largement dépendants des évaluations au bilan. Les valeurs suivantes d'un compte très simplifié sont ainsi en rapport avec le bilan présenté précédemment et qui pourrait représenter la situation en fin d'exercice.

Rubriques	Montants
primes acquises	25
+ produits des placements	+6
- charge des sinistres payés	-10
- charge des provisions	-16
- frais de gestion	-3
= Résultat de l'exercice	+2

Le rattachement à l'exercice de référence s'opère en prenant en considération les événements envisagés dans les contrats. Un sinistre est ainsi affecté à l'exercice dans lequel est intervenu le fait générateur, même si le règlement doit intervenir plus tard; dans ce dernier cas les paiements futurs sont estimés et portés en provision. Symétriquement les primes sont affectés à l'exercice pour la période de garantie qui y est incluse; si un versement fait dans l'année couvre une période de garantie allant au delà du 31 décembre; seule la quote-part afférente à l'exercice en cours apparaît dans les primes acquises.

Le résultat final est on l'espère positif; dans ce cas une partie substantielle est conservée dans l'entreprise pour alimenter les fonds propres et par conséquent la marge de solvabilité. Si le résultat est déficitaire, il s'imputera sur les fonds propres, dans la mesure où ils sont suffisants.

On comprendra que le solde du compte de résultat dépend largement des méthodes et de la qualité des évaluations actuarielles: en effet, les sinistres provisionnés sont estimés, tout comme la part acquise des primes.

Le résultat technique.

Mise à part l'incidence de la réassurance, on peut ainsi définir le résultat technique de l'assurance non-vie, d'après le nouveau plan comptable de 1994 :

1. Primes acquises:
 - 1a Primes (+)
 - 1b Variations des primes non acquises et risques en cours(+/-)
2. Produits des placements alloués.
3. Charges des sinistres:
 - 3a Prestations et frais payés (-)
 - 3b Charge des provisions pour sinistres (+/-)
4. Frais d'acquisition et d'administration.
 - 4a Frais d'acquisition (-)
 - 4b Frais d'administration (-)

En ce qui concerne les sinistres, le résultat global de l'exercice N accumule des chiffres relatifs à l'année de survenance N et des éléments correspondants à des années de survenance antérieures (règlements et jeu des provisions). Aux fins d'analyse du résultat de l'exercice comptable

les entreprises doivent ventiler les règlements et mouvements de provisions par exercices d'origine des sinistres (survenance), et notamment dans les états C10 et C11 destinés à l'autorité de contrôle.

Le résultat d'exploitation des garanties données dans un exercice comptable est estimé en fin d'année, mais l'appréciation qu'on peut en avoir sera progressivement rectifiée au cours des années suivantes. Ainsi le taux de sinistres à primes (S/P) d'un exercice de garantie N est différent suivant qu'on l'apprécie à la fin de l'année N, ou de l'année N+1, ou encore N+2.

2 - Le risque et sa description

2.1 Ensemble des événements assurés

Il s'agit tout à la fois d'organiser rationnellement l'inventaire a priori des événements en cause, de qualifier leur importance de manière chiffrée et de définir clairement la correspondance entre les événements et les dommages correspondants.

On va d'abord supposer qu'on peut à l'avance envisager toutes les éventualités possibles au regard de leur conséquences financières, et que ces divers aléas sont dénombrables, c'est à dire qu'on pourrait leur affecter un numéro .

exemple: On s'intéresse à la survie ou au décès de M.X sur une période future d'un an, en supposant évidemment que la personne en cause est aujourd'hui vivante, sachant que le décès, pour quelque cause que ce soit, occasionnera le versement d'un capital dans les quinze jours de l'événement. Les seules éventualités à prévoir sont: soit le décès, l'un quelconque des 365 jours à venir, soit la survie au bout d'un an. Si l'on devait prévoir un versement différent suivant que le décès est accidentel ou non, il faudrait scinder l'hypothèse de la disparition de M.X tel ou tel jour en deux sous-hypothèses, "décès accidentel" et "décès non-accidentel".

On comprendra sur cet exemple :

- 1° que l'analyse des événements dépend de la définition des dommages à payer,
- 2° que la description doit être exhaustive mais sans double-emploi.

D'un point de vue formel l'ensemble des événements E conditionnant le risque peut être décomposé en une collection d'événements élémentaires E_i tels que:

- deux événements élémentaires distincts E_i et E_j sont incompatibles, c'est à dire que leur réalisation simultanée est impossible;
- toute circonstance E envisageable du point de vue du coût qu'elle occasionne est la réunion d'un certain nombre fini d'événements élémentaires $E_{i1}, E_{i2}, \dots, E_{ik}$, ce qui veut dire que c'est la réalisation soit de E_{i1} , soit de $E_{i2}, \dots$, soit de E_{ik} ;
- toutes les possibilités sont envisagées. Si E est prévu, non-E (la non réalisation de E ou encore le complémentaire de E) l'est également. La réunion de la totalité des E_i correspond à la certitude notée Ω .

2.2 Mesure de probabilité; variables aléatoires

Une deuxième étape consiste à affecter à chaque événement élémentaire une **probabilité**. La définition rigoureuse de cette notion subtile est du domaine des mathématiques. Toutefois on peut en avoir une très bonne idée en se référant à l'intuition du parieur. C'est d'ailleurs de là qu'est partie la réflexion de Blaise Pascal qui, à la demande du chevalier de Méré, joueur de cartes passionné, imagina en 1654 une "géométrie du hasard".

Ainsi la probabilité d'un événement E est simplement la somme $p(E)$ que l'on accepterait de parier si, en cas de réalisation de E, on devait recevoir 1 franc, pourvu toutefois qu'on accepte de se tenir à la démarche rationnelle suivante:

1 - **Axiome d'additivité**: Si E et F sont 2 événements incompatibles pour lesquels on a défini des probabilités $p(E)$ et $p(F)$ (on a accepté de parier ces dernières sommes si 1 est l'enjeu commun en cas de survenance de E ou de F), alors $p(E \text{ ou } F) = p(E) + p(F)$, puisque c'est au total la somme pariée sur la survenance de E ou F, avec un enjeu de 1 franc;

2 - **Axiome d'équité**: Si $p(E)$ et $p(\text{non-E})$ sont les probabilités de 2 événements complémentaires, $p(E) + p(\text{non-E}) = 1$. En effet on a parié sur un événement et son contraire, c'est à dire qu'on est sûr de gagner 1 franc, et il serait inéquitable que pour cette opération certaine on ait parié au total moins ou plus que 1 franc.

A partir de ces deux seules propositions intuitivement évidentes, on peut développer logiquement des conséquences nombreuses, qui pourtant ne permettraient que rarement de donner une valeur chiffrée précise aux probabilités théoriques. En effet c'est uniquement dans le cas des jeux de hasard créés par l'homme que des considérations de symétrie autorisent à attribuer a priori des mesures de probabilités aux événements élémentaires. Ainsi dans le jeu de pile ou face on peut penser que les probabilités de tirage de l'une ou l'autre face d'une pièce sont égales, et comme on élimine l'idée d'un troisième événement (l'équilibre sur la tranche), il s'ensuit que chacune des probabilités vaut $\frac{1}{2}$.

Pour résumer simplement, on cherche à attribuer à toute éventualité une mesure de probabilité, nombre compris entre 0 et 1, d'autant plus faible que l'événement est rare, et tel que la somme des probabilités des événements élémentaires soit égale à 1.

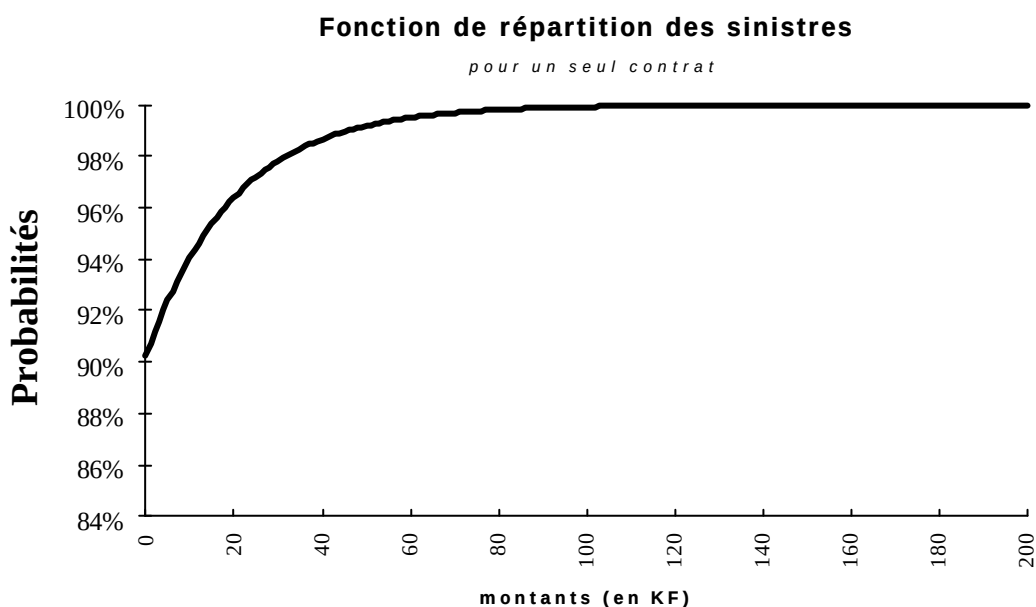
Dans la pratique habituelle, lorsqu'on s'intéresse à autre chose que des jeux, il n'est pas possible de déterminer les probabilités sans recours à l'**observation statistique**, c'est à dire à la constatation de fréquences issues d'expériences nombreuses portant sur des événements de même nature. En effet la théorie probabiliste nous apprend que si on fait n observations indépendantes, en s'intéressant à la survenance d'un événement de probabilité p, et si on constate que le nombre de réalisations est k, la fréquence k/n est la meilleure estimation de p, et si n augmente indéfiniment la différence absolue entre la fréquence et la probabilité théorique p tend vers 0. Cette convergence de la fréquence vers la probabilité est le premier aspect de **la loi des grands nombres**.

Après la définition claire de l'ensemble des événements conditionnant un risque, et si possible la détermination des mesures de probabilité correspondantes, on va devoir préciser les valeurs des pertes financières occasionnées par les événements. Ces pertes sont, dans le langage des probabilistes, des **variables aléatoires** et la description du risque se présentera formellement ainsi:

- un ensemble d'événements E,
- des variables aléatoires $X(E)$,
- des probabilités telles que $p[X(E) = x]$, définies pour l'ensemble des valeurs possibles des pertes x.

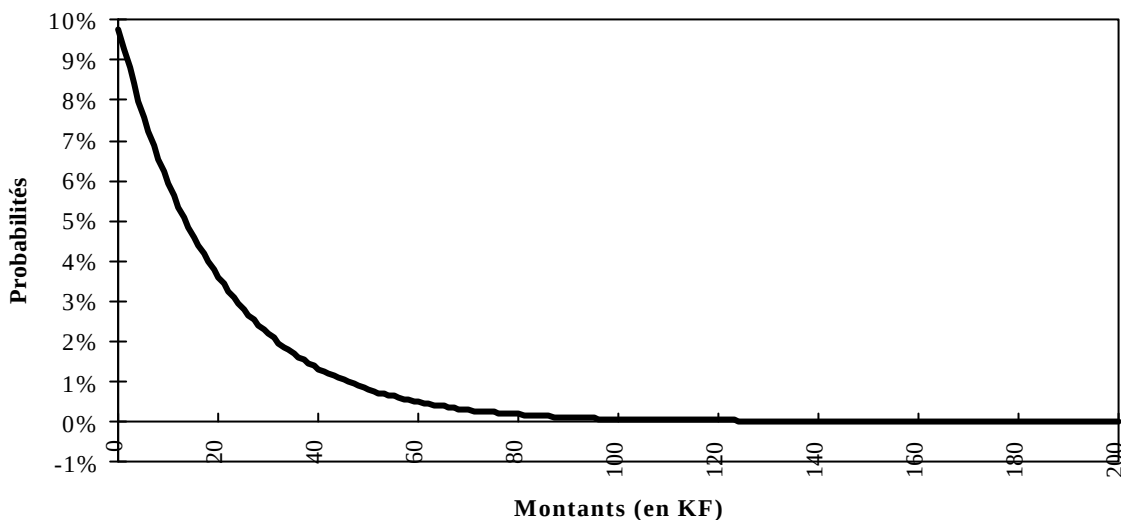
Une variable aléatoire plus générale aura sa distribution de probabilité décrite par sa **fonction de répartition** F, ainsi définie: $F(x) = P(X \leq x)$.

2.3 Exemple:



Tranches de coûts	%	% cumulés
0 (aucun sinistre)	90,25%	90,25%
1 à 20	6,16%	96,41%
21 à 50	2,79%	99,20%
51 à 100	0,73%	99,93%
101 à 200	0,07%	100,00%

1 - F(x)



3 - La mutualité

3.1 Moyennes de variables indépendantes; lois des grands nombres

Le secret universel de l'assurance est le regroupement d'un grand nombre de contrats d'assurance au sein d'une mutualité, pour que se réalisent des compensations entre les risques sinistrés et ceux pour lesquels l'assureur aura perçu des primes sans avoir dû régler des prestations. Il n'y a pas ici de différence de technique entre les "mutuelles" et les sociétés anonymes d'assurance.

Précisons maintenant par le calcul les effets de cette mise en commun des risques, et nous en percevrons alors les conditions et limites.

Faisons masse de l'ensemble des charges annuelles de sinistres relatives à n risques a priori identiques, mais indépendants entre eux.

Deux risques sont a priori identiques lorsque, en l'état de la connaissance de l'assureur, la distribution de la charge aléatoire de sinistres X (la probabilité $P(X=x)$) est la même pour chacun d'eux; c'est par exemple le cas de deux risques "automobile" caractérisés par le même véhicule assuré, roulant dans la même zone de circulation, avec deux conducteurs ayant les mêmes caractéristiques.

Deux risques sont indépendants, lorsque la survenance d'un sinistre pour l'un d'entre eux n'a pas d'action sur la survenance des sinistres de l'autre. A l'inverse deux risques peuvent être corrélés, lorsque par exemple, dans le domaine de l'assurance incendie, il existe entre eux une proximité ou une contiguïté: le feu peut en effet se propager d'un local assuré à l'autre.

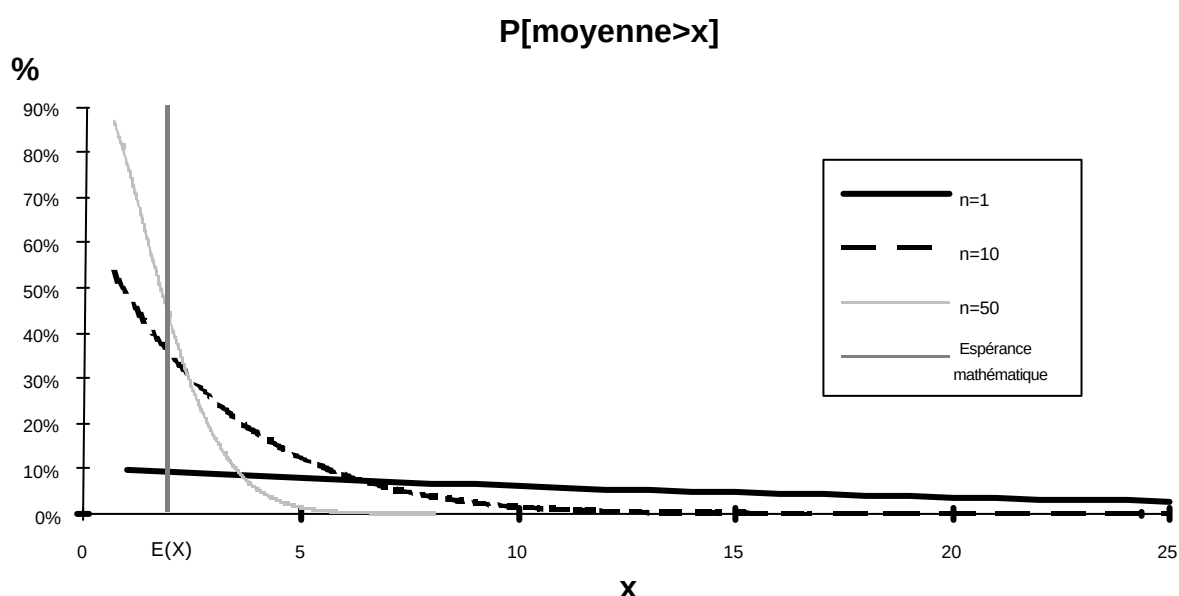
En particulier pour déterminer le tarif, a priori identique pour chacun des n risques, l'assureur va s'intéresser à la charge moyenne de sinistres qui interviendront au sein du groupe homogène qu'il a constitué.

Pour un risque pris au hasard la distribution des sinistres est définie par l'ensemble des probabilités $p_x = P(X=x)$, où x varie de 0 (cas d'absence de sinistre indemnisé) à L , limite supérieure d'indemnisation. Sur le graphique numéro 1 on a représenté par la courbe relative à $n=1$ les probabilités pour que X dépasse un seuil x exprimé en milliers de francs, dans une hypothèse où il y aurait une chance sur 10 d'enregistrer un sinistre dont la valeur pourrait atteindre $L = 200\,000$ F. On voit ici une grande dispersion des sinistres possibles, puisque la probabilité de dépassement du seuil x décline très faiblement et qu'en particulier elle est encore de 5,92% pour $x=10$.

Tranches de coûts	%			
	1 risque	2 risques	10 risques	50 risques
0 sinistre	90.25%	81.45%	35.84%	0.59%
1 à 10	3.84%	11.37%	62.07%	99.41%
11 à 20	2.33%	4.41%	2.05%	0.00%
21 à 30	1.41%	1.71%	0.04%	0.00%
31 à 50	1.38%	0.91%	0.00%	
51 à 80	0.62%	0.15%	0.00%	
81 à 200	0.18%	0.01%	0.00%	

Si on considère maintenant $n=10$ risques et qu'on s'intéresse à la charge moyenne de sinistres (courbe en tirets), on constate que la probabilité de dépassement du seuil x diminue très rapidement, et qu'en particulier pour $x=10$ elle ne vaut que 2,1%. Pour $n=50$ le phénomène est encore plus net: la probabilité de dépassement du seuil $x=10$ est nulle.

Graphique n°1



La théorie montre que, sous des conditions très larges, ce qu'on a visualisé peut être généralisé: lorsque le nombre de risques n augmente la probabilité pour que la valeur moyenne des sinistres dépasse un seuil élevé tend à diminuer. Le risque global est pour l'assureur de plus en plus évaluable.

Plus précisément, lorsque n augmente indéfiniment, la charge moyenne des sinistres a très peu de chances de s'écarter d'une valeur $E(X)$, appelée "espérance mathématique" de X , et ainsi définie:

$$E(X) = \text{somme des produits } (x.p_x) \text{ pour toutes les valeurs possibles de } x.$$

Remarques:

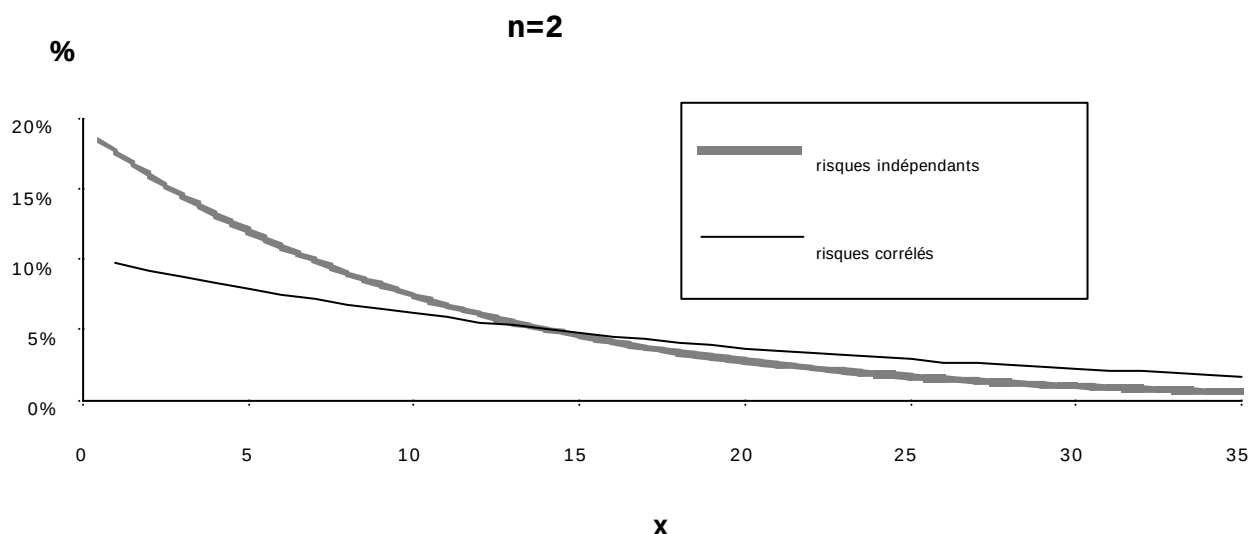
Les conditions d'une bonne efficacité de la mutualité sont:

a) un regroupement d'effectifs suffisamment nombreux de risques a priori semblables, et ce n'est pas le cas pour des risques exceptionnels, ou insuffisamment connus, dans la mesure où leur homogénéité n'est pas suffisante;

b) l'indépendance des risques, car la compensation statistique dans une moyenne suppose qu'il y ait dans le même intervalle de temps peu ou pas de sinistres sur certains contrats, et des sinistres importants pour d'autres.

Le graphique n°2 montre les effets de la compensation, sur les mêmes bases chiffrées que dans l'exemple précédent, dans une mutualité de 2 risques, d'une part s'ils sont indépendants, et d'autre part s'ils sont complètement corrélés (identité des valeurs des sinistres). La corrélation fait que la probabilité d'avoir en moyenne des sinistres importants est plus grande.

Graphique n°2



4 - La demande d'assurance

4.1 Notion d'utilité de VNM; critère de maximisation de l'utilité espérée

Le point de départ de notre analyse de tarification était une vision comptable des résultats et la préoccupation de connaître le prix de revient pour l'assureur. C'est ainsi que la prime pure doit être en rapport avec le coût des prestations, et cette attitude conditionne l'offre de garanties par l'assureur.

En dehors peut-être du cas des assurances obligatoires, si l'on s'assure c'est que l'on craint les conséquences financières d'un aléa, et le choix que l'on fait d'une modalité d'assurance est un compromis entre cette aversion au risque et le désir de faire des économies sur la prime d'assurance. L'aversion n'est pas une notion absolue, elle est en rapport avec la situation de fortune de l'agent économique; ainsi une grande entreprise aux fonds propres importants sera plus tentée qu'une autre de pratiquer l'auto-assurance.

On verra plus tard que les considérations de prix de revient et de solvabilité font que les assureurs offrent normalement des tarifs supérieurs à ceux qui résulteraient de l'application du principe de l'espérance mathématique. Cependant il y a demande d'assurance. Un modèle explicatif est celui de la théorie de l'Utilité espérée de Von Neumann et Morgenstein, qu'on peut ainsi présenter:

On s'intéresse à la situation de fortune W d'un agent économique (individu ou entreprise). La "satisfaction" de l'agent, l'utilité de la détention de W , lorsque ce dernier chiffre est connu, se "mesure" par une fonction $u(W)$. A priori il est certain que u est une fonction croissante de W , et si on suppose qu'elle est dérivable $u'(W) > 0$.

Dans un univers incertain, W est une variable aléatoire et l'utilité de cette situation est définie comme l'espérance mathématique de $u(W)$:

$U = E[u(W)]$. Il est supposé que les choix de l'agent économiques tendent à maximiser U , et en particulier le choix d'une formule d'assurance se fait sur ce critère.

4.2 L'autoassurance; les franchises

Dans l'exemple suivant on suppose:

Une fortune initiale $W = 50\,000$

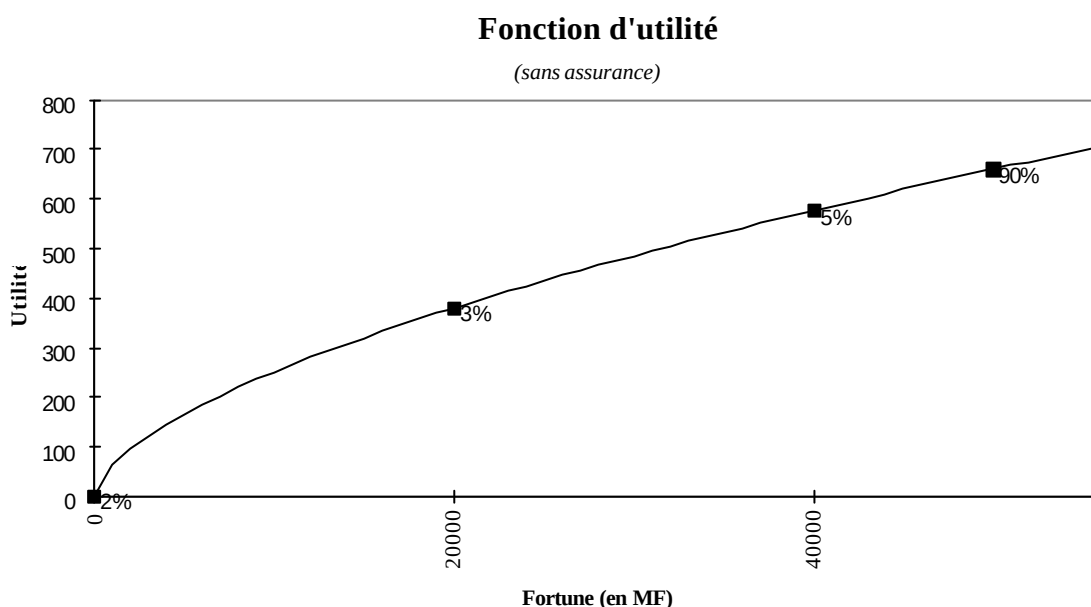
une fonction d'utilité $U(W) = W^{0,6}$

Cette fonction est croissante, mais la rapidité de cette croissance décroît lorsque W augmente, ce qui caractérise l'aversion au risque.

Le risque est ainsi défini:

pas de sinistre avec une probabilité de 90%,
sinistre de 10 000 avec une probabilité de 5%,
sinistre de 30 000 avec une probabilité de 3%,
sinistre de 50 000 avec une probabilité de 2%, annihilant complètement la fortune initiale.

La représentation de la fonction d'utilité est la suivante:



L'intervention d'une assurance peut améliorer l'utilité espérée, pourvu qu'elle ne coûte pas trop cher. Dans le tableau suivant on a examiné plusieurs solutions de couverture du risque et calculé les utilités espérées correspondantes.

La meilleur est ici, compte-tenu d'un chargement de 20% des primes, une assurance avec franchise de 10 000.

	Sans assurance	Assurance complète	Assurance pour une part	Assurance avec franchise
Prime	0	2 880	1 440	1 680
Observations		Chargement à	Quote part assurée	Franchise
		20.00%	50.00%	10 000
Utilité	634,05	636,68	635,37	637,97

5 - Approche du calcul de la prime

5.1 Prime pure et chargements

Le prix de vente d'une garantie d'assurance est déterminé en prenant en considération trois types de facteurs:

- a) le coût de revient incompressible des prestations à servir, sachant qu'on ne peut que le prévoir avec des incertitudes;
- b) les conditions de gestion de l'assureur et ses contraintes de financement;
- c) l'état du marché, sachant qu'il est de plus en plus ouvert à toutes les concurrences.

En fonction de ces considérations le prix global (net de taxes éventuelles) s'écrit:

$P'' = \text{prime pure} + \text{chargements de gestion et de commercialisation} + \text{marge de sécurité}$
--

La prime pure notée P désigne le coût incompressible des prestations, dans les meilleures conditions de fonctionnement de la mutualité, c'est à dire dans l'hypothèse d'une parfaite compensation entre des risques nombreux. On a vu au § 3-2 que ce coût moyen limite est $E(X)$, l'espérance mathématique de la charge des sinistres. Le graphique n°1 montre que pour des effectifs limités il y a une probabilité non négligeable que le coût moyen soit supérieur à la prime pure $E(X)$.

Les chargements désignent les parts de primes absorbées par les frais de gestion et les commissions versées à divers intermédiaires de l'assureur en rémunération des apports commerciaux ou d'actes de gestion. Les premiers éléments sont éventuellement compressibles, dans la mesure où la société d'assurance a des frais fixes qu'elle peut d'autant mieux répartir que son activité est importante. En revanche les commissions sont la plupart du temps proportionnelles à la prime globale P'' en vertu des conventions qui lient l'assureur et ses intermédiaires.

La marge de sécurité est très variable d'un assureur à l'autre. Sa première nécessité résulte du fait que des écarts de coût entre la charge future de sinistre X et la prime pure se manifesteront, avec une probabilité d'autant plus grande que les effectifs de risques gérés sont faibles. Une deuxième motivation à l'existence d'une marge de tarification est l'incertitude parfois considérable sur l'évaluation de la prime pure. Enfin les dispositions réglementaires sur la marge de solvabilité, ainsi que le nécessité de rémunérer des bailleurs de fonds (actionnaires ou prêteurs), obligent à dégager une marge bénéficiaire suffisante.