CNAM 2002-2003

Mathématiques actuarielles fondamentales (assurance non vie)

Examen UV B5 26754 - 16 juin 2003 - 19h – 21h

(Tous documents autorisés)

L'énoncé porte sur la création d'un assureur non vie. Les exercices sont indépendants.

Le premier exercice vérifie la cohérence des hypothèses retenues par cet assureur lors de sa création.
Le deuxième examine les résultats de son activité au bout de 5 ans.
Le troisième explore les possibilités d'ajout d'une franchise et/ou d'une cession en réassurance en excédent de sinistre.

Exercice 1

Remarque : L'exercice 1 est très proche du TD7.

Un assureur dommages se créé dans les conditions suivantes :
- il se propose de couvrir des risques caractérisés a priori par :
  - une fréquence annuelle de survenance des sinistres poissonienne, de paramètre $\lambda = 2\%$;
  - une distribution des montants de sinistres Y dont la densité de probabilité f(y) est modélisée par $f(y) = 5x10^{-5}.\exp(-5x10^{-5}y)$ pour $y > 0$.
- les hypothèses de commercialisation retenues sont :
  - une prime commerciale P'' de 600 €, comportant des frais d'acquisition à hauteur de 20% ;
  - un niveau de souscription de 10 000 contrats par an.
- les frais de gestion, hors frais d'acquisition, seraient de 50 euros par contrat.
- il dispose de fonds propres pour un montant K = 1 500 000 euros.

Question 1 :

1.a : Quelle est la prime pure pour la couverture d'un risque durant un an ?

1.b : Quelle est la variance de la charge annuelle pour un contrat ?

Dans le modèle fréquence/coût moyen, l'espérance et la variance de la charge annuelle de sinistres pour un contrat s'obtiennent en appliquant les formules :

$$\boxed{E(X) = E(N).E(Y)}$$

$$\boxed{V(X) = E(N).V(Y) + V(N)E(Y)^2}$$

Où X représente la variable aléatoire « charge annuelle pour un contrat », N la variable aléatoire « fréquence » et Y la variable aléatoire « coût moyen d'un sinistre ».

Ici, la fréquence est poissonnienne, de paramètre λ soit $E(N) = V(N) = \lambda = 2\%$

la distribution des montants de sinistres est une loi exponentielle (soit on la reconnaît, soit on recalcule en intégrant par parties) de paramètre α

$E(Y) = 1/\alpha \quad V(Y) = 1/\alpha^2$

d'où :
$E(X) = \lambda/\alpha$
$V(X) = \lambda/\alpha^2 + \lambda/\alpha^2 = 2.\lambda/\alpha^2$

Remarque : quand la fréquence est poisonnienne, V(X) se réécrit :
$V(X) = \lambda . (V(Y) + E(Y)^2) = \lambda.E(Y^2)$

Application numérique :
$\lambda = 2\%$
$\alpha = 5 \times 10^{-5}$

$E(N) = V(N) = 2\%$
$E(Y) = 20\ 000$
$V(Y) = 400\ 000$

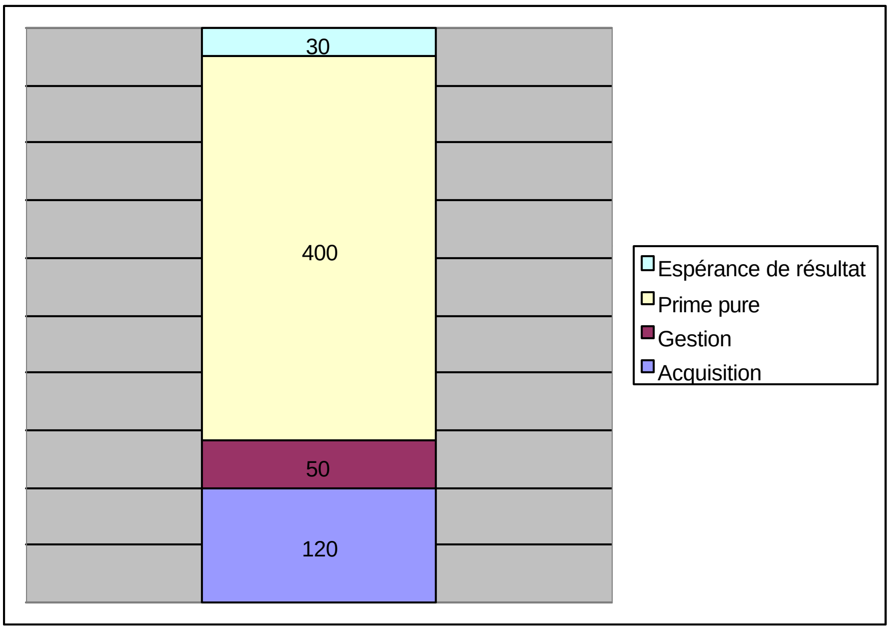
$E(X) = 400$
$V(X) = 16\ 000\ 000$
$\sigma(X) = 4\ 000$

Question 2 :

2.a : Calculer la partie de la prime commerciale correspondant au chargement de sécurité η ?

Lorsqu'un assuré paye une prime commerciale P'' de 600, elle sert à rémunérer :

- le réseau de distribution (frais d'acquisition) à hauteur de 20% x P'' = 120
- les coûts fixes de gestion interne pour 50
- l'espérance de la charge annuelle de sinistre pour 400 (cf. question 1)
- le solde, soit **30**, correspond à l'espérance de gain par contrat que l'on justifie techniquement par le besoin d'un chargement de sécurité pour limiter le risque de ruine. Rapporté à la prime pure (400), ce chargement de sécurité est donc de **7,5%** (=30/400).
-



-

2.b : Quelles sont les contraintes sur le niveau de souscription pour obtenir un coefficient de sécurité β supérieur ou égal à 4 ?

Le coefficient de sécurité β est défini par :

β = (richesse disponible + espérance de résultat global) / écart-type(résultat global)

La richesse disponible est fixée à K (= 1 500 000 euros), l'espérance de résultat (30) et l'écart type de la charge annuelle pour un contrat (4000) ont été calculés dans les précédentes question.

Pour un ensemble de n contrats : β = (K + n. E(X)) / racine(n).s(X)

$\beta = \frac{1500000+30.n}{4000\sqrt{n}}$

On veut obtenir un coefficient b au moins égal à 4 pour afin de rendre le risque de ruine négligeable, soit une inéquation du second degré en $\sqrt{n}$:

$30\sqrt{n}^2 - 16\,000\sqrt{n} + 1\,500\,000 \leq 0$

Déterminant : 16000² - 4.30.1 500 000 = 76 000 000 > 0 donc deux solutions
$\sqrt{n}$ = 412 soit n = 169 714
$\sqrt{n}$ = 121,4, soit n = 14 731

La probabilité de ruine est très faible pour un nombre de contrats inférieur à 14 731 (la richesse initiale disponible compense l'incertitude) ou supérieur à 169 714 (la loi des grands nombre joue pleinement).

Sont-elles respectées par le niveau de souscription anticipé ?

Au cas d'espèce, le niveau de souscription anticipé est de 10 000, ce qui est satisfaisant (1er cas). Il correspond à un coefficient de sécurité de 4,5

$\frac{1500000+30.10000}{4000.100}$ = 4,5, soit une probabilité de ruine **a priori** très faible de $3{,}4 \times 10^{-6}$.

Exercice 2

Le tableau ci-dessous reprend les principaux résultats de l'activité au terme de la cinquième année (tous les montants sont en euros constants : on néglige l'inflation) :

Année	Contrats	Nombre de sinistres	Paiements cumulés	Provisions	Coût
1	9 820	204	4 334 400	0	4 334 400
2	10 817	196	3 869 317	288 983	4 158 300
3	11 648	241	4 366 292	703 108	5 069 400
4	11 545	211	3 345 032	1 016 368	4 361 400
5	12 631	276	2 381 671	3 384 829	5 766 500
Total		1 128	18 296 712	5 393 288	23 690 000

Remarque : le nombre de contrat augmente d'environ 6% par an. A ce rythme, et toutes choses égales par ailleurs (fonds propres disponibles, espérance et écart type du résultat d'ensemble), le niveau de souscription sortirait de la zone « avec risque de ruine négligeable » au bout de 3,3 années supplémentaires.

Les provisions dans ce tableau sont celles évaluées dossier par dossier, par le service de gestion des sinistres.

Evaluées à partir du triangle des paiements annuels ci-dessous, et en utilisant la méthode des cadences (chain-ladder), quelles seraient les provisions à constituer pour les années 2 à5 (on suppose qu'il n'y plus de paiements après la quatrième année) ?

	Règlement après j années				
année	0	1	2	3	4
1	1 889 022	1 417 237	524 162	165 201	338 778
2	1 976 889	1 478 315	38 714	375 399	
3	2 302 334	1 500 572	563 386		
4	2 065 492	1 279 540			
5	2 381 671				

Evaluons les provisions avec la méthode chain-ladder
Celle-ci s'applique sur des paiements cumulés :

	Règlement cumulés après j années				
année	0	1	2	3	4
1	1 889 022	3 306 259	3 830 421	3 995 822	4 334 400
2	1 976 889	3 455 204	3 493 918	3 869 317	
3	2 302 334	3 802 906	4 366 292		
4	2 065 492	3 345 032			
5	2 381 671				

Calculons les coefficients de passage d'une colonne à la suivante employés par la méthode :

pour passer de la colonne 0 à la colonne 1 : $f_{0\text{->}1}$ = (3 306 259 + 3 455 204 + 3 802 906 + 3 345 032) / (1 889 022 + 1 976 889 + 2 302 334 + 2 065 492) = 168,9%

pour passer de la colonne 1 à la colonne 2 : $f_{1\text{->}2}$ = (3 830 421 + 3 493 918 + 4 466 292) / (3 306 259 + 3 455 204 + 3 802 906) = 110,7%

pour passer de la colonne 2 à la colonne 3 : $f_{2\text{->}3}$ = (3 995 622 + 3 869 317) / (3 830 421 + 3 493 918) = 107,4%

pour passer de la colonne 3 à la colonne 4 : $f_{3\text{->}4}$ = (4 334 400) / (3 995 622) = 108,5%

Pour passer de la colonne 4 au coût ultime : $f_{3\text{->ultime}}$ = 1

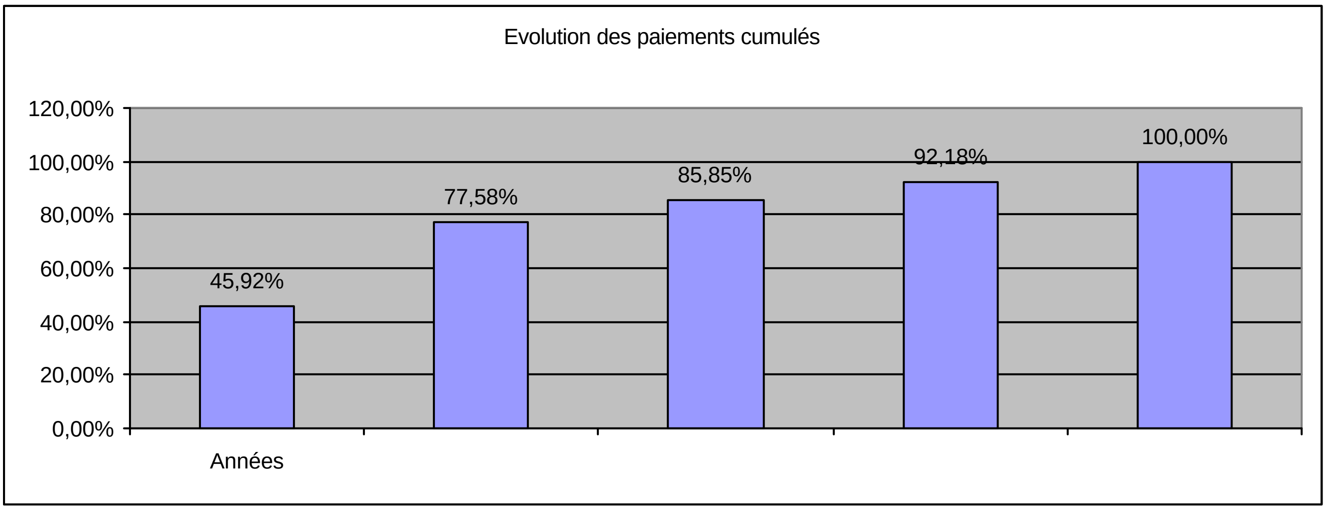
D'où,

Pour passer de la colonne 0 au coût ultime :
$f_{0\text{->ultime}} = f_{0\text{->}1} \,.\, f_{1\text{->}2} \,.\, f_{2\text{->}3} \,.\, f_{3\text{->ultime}} = 217{,}8\%$
Soit des provisions de $f_{0\text{->ultime}}$ -1 = 117,8% des paiements déjàeffectués.
Où encore, cela signifie que l'on considère qu'en colonne 0, on a payé 1/217,8% 45,92% du coût total.

De même pour la colonne 1 :
$f_{1\text{->ultime}} = f_{1\text{->}2} \,.\, f_{2\text{->}3} \,.\, f_{3\text{->ultime}} = 128{,}9\%$
Soit des provisions de $f_{1\text{->ultime}}$ -1 = 28,9% des paiements déjàeffectués.
Où encore, cela signifie que l'on considère qu'en colonne 1, on a payé 1/128,9% 77,58% du coût total.

etc…

	0 -> 1	1 -> 2	2 -> 3	3 -> 4	4 -> ultime
Facteur de passage d'une colonne à la suivante	168,9%	110,7%	107,4%	108,5%	100,0%
Facteurs de passage d'une colonne au coût ultime	217,8%	128,9%	116,5%	108,5%	100,0%
Provisions / cumul des paiements	117,8%	28,9%	16,5%	8,5%	0,0%
Paiements cumulés en proportion du coût ultime	45,92%	77,58%	85,85%	92,18%	100,00%



Le niveau des provisions évalué par les gestionnaires de sinistres vous semble-t-il suffisant ?

	Paiements cumulés	Facteurs	Provisions	Provisions gestionnaires	Ecart
1	4 334 400	0%	0	0	0
2	3 869 317	8,5%	328 069	288 983	-39 086
3	4 366 292	16,5%	719 801	703 108	-16 693
4	3 345 032	28,9%	966 843	1 016 368	49 524
5	2 386 671	117,8%	2 804 647	3 384 829	580 183
Total			4 819 360	5 393 288	573 929

Globalement, les évaluations des gestionnaires sont supérieures (de 574 kEuros) à celles obtenues par la méthode des cadences. Leurs estimations dossier/dossier semblent suffisantes.

Bémol : la méthode des cadences est réputée plus fiable en fin de liquidation qu'en début. Or ici, elle donne des insuffisances de provision pour les exercices anciens, plus que compensées par le niveau de prudence sur les exercices récents, pour lesquels les estimations des gestionnaires sont a priori plus fiables.

Bémol inverse : les sinistres « anciens », en nombre probablement assez faible dans ce portefeuille (environ 200 sinistres par ans, combien en reste-ils d'ouvert au bout de 3 ans ?) sont probablement mieux connus par les gestionnaires que par une méthode statistique valable sur des nombres importants.

Bémol complémentaire : les paiements annuels ne semblent pas présenter une grande régularité (par comparaison des années 1 et 2), on pourrait s'attendre a priori à ce que les paiements annuels diminuent au cours du temps mais ici, on constate plus de paiements en colonne 4 qu'en colonne 3 pour l'année 1, et plus de paiements en colonne 3 qu'en colonne 2, pour l'année 2.

Une explication pourrait être l'existence de quelques « gros » sinistres ayant, en fonction de leur date de règlement, une influence importante sur les cadences estimées. -> cf. exercice 3.

Sur l'ensemble des 5 ans, en supposant que les hypothèses faites à l'origine en matière de frais d'acquisition et de gestion se sont révélées exactes, quel a été le résultat cumulé de l'assureur ?

Sur l'ensemble des 5 années, l'assureur a souscrit 9 820 + 10 817 + 11 648 + 11 545 + 12 631 = 56 461 contrats.

Pour chacun de ces contrats, il a encaissé 600, supporté 20% de frais d'acquisition et 50 de frais de gestion, soit un solde disponible de 430 par contrat pour régler les sinistres.

56 461 x 430 = 24 278 230.
Il a payé 18 296 712. Il lui reste donc 5 981 518 pour régler les sinistres non clos.

Si l'on retiens comme fiable les estimations des gestionnaires, son résultat, sur l'ensemble des 5 ans est : 5 981 518 – 5 393 288 = 588 230 (si l'on retenait comme valorisation la plus fiable des provisions le résultat de la méthode des cadences, le résultat serait de 1 162 159).

<u>Remarque :</u>
a l'origine, l'assureur anticipait une espérance de gain de 30 par contrat, soit 30 x 56 461 = 1 693 830.

La réalité étant inférieure aux anticipations, s'agit-t-il d'un aléa acceptable, ou un indice d'une erreur de modélisation ?

Le S/P correspondant aux hypothèses était de 400/430 = 93%
Les S/P annuels a posteriori sont :

Année	S/P gestionnaires	S/P cadences
1	103%	103%
2	89%	90%
3	101%	102%
4	88%	87%

5	106%	95%
global	98%	95%

Il y a des écarts importants entre exercices. Ils peuvent provenir de la petite taille du portefeuille (environ 200 sinistres par ans : le résultat de l'année est très influencé par la survenance de quelques sinistres en plus ou en moins).

Sur l'ensemble des 5 ans, le coût moyen par sinistre est de 21 000 (base gestionnaires, sur la base de 1128 sinistres). Cela pourrait correspondre à une erreur (de 5%) de paramètre dans la modélisation a priori de la distribution des coûts. En remplacent le paramètre

$\alpha = 5 \times 10^{-5}$
par
$\alpha = 4{,}762 \times 10^{-5}$
alors E(coût d'un sinistre) = 21 000, mais les limites sur le coefficient β deviennent : $n < 12\,427$ ou $n > 201\,173$.

La encore, il ne peut être exclu que la société soit en train de sortir ou soit déjà sortie, de la zone de « probabilité de ruine négligeable ».

Y compris dans le cas ou la modélisation initiale était « exacte », les écarts peuvent être dus à quelques sinistres « graves » ayant une influence, certes normale, mais forte sur le résultat annuel. Il y a donc de multiples raisons de d'envisager de se réassurer.

Exercice 3

La statistique ci-dessous classe les sinistres des cinq premières années par tranches de coût.

Tranche	Nombre de sinistres	Coût total de la tranche
De 0 à2 000	107	112 799
2 000 à5 000	143	526 048
5 000 à10 000	194	1 535 820
10 000 à20 000	269	4 195 740
20 000 à30 000	163	4 289 675
30 000 à40 000	99	3 660 113
40 000 à50 000	60	2 861 858
50 000 à60 000	37	2 125 129
60 000 à70 000	22	1 525 093
70 000 à80 000	13	1 068 240
plus de 80 000	21	1 789 486
Total	1 128	23 690 000

A quelle diminution de la prime pure correspondrait l'instauration d'une franchise fixe toujours déduite de 5 000 euros ?

Réécrivons les coût totaux par tranche en cas d'instauration d'une franchise fixe toujours déduite :

Tranche	Nombre de sinistres	Coût total de la tranche avant franchise	Coût total de la tranche après franchise
De 0 à2 000	107	112 799	0
2 000 à5 000	143	526 048	0
5 000 à10 000	194	1 535 820	1 535 820 – 143 x 5000 = 565 820
10 000 à20 000	269	4 195 740	4 195 740 – 269 x 5000 = 2 850 740
20 000 à30 000	163	4 289 675	4 289 675 – 163 x 5000 = 3 474 675
30 000 à40 000	99	3 660 113	3 660 113 – 99 x 3 660 113 = 3 165 113
40 000 à50 000	60	2 861 858	2 861 858 - 60 x 5000 = 2 561 858
50 000 à60 000	37	2 125 129	2 125 129 – 37 x 5000 = 1 940 129
60 000 à70 000	22	1 525 093	1 525 093 – 22 x 5000 = 1 415 093
70 000 à80 000	13	1 068 240	1 068 240 – 13 x 5000 = 1 003 240
plus de 80 000	21	1 789 486	1 789 486 – 21 x 5 000 = 1 684 486
Total	1 128	23 690 000	18 661 154

La diminution du coût total est de (23 690 000 – 18 661 154), soit une baisse de 21,23% (en proportion du coût total initial)

Même question pour une cession en excédent de sinistre au delà d'une priorité de 50 000 ?

Réécrivons les coût totaux par tranche après cession en excédent de sinistres au delà d'une priorité de 50 000 :

Tranche	Nombre de sinistres	Coût total de la tranche avant cession	Coût total de la tranche après cession
De 0 à2 000	107	112 799	112 799
2 000 à5 000	143	526 048	526 048
5 000 à10 000	194	1 535 820	1 535 820
10 000 à20 000	269	4 195 740	4 195 740
20 000 à30 000	163	4 289 675	4 289 675
30 000 à40 000	99	3 660 113	3 660 113
40 000 à50 000	60	2 861 858	2 861 858
50 000 à60 000	37	2 125 129	37 x 50 000 = 1 850 000
60 000 à70 000	22	1 525 093	22 x 50 000 = 1 100 000
70 000 à80 000	13	1 068 240	13 x 50 000 = 650 000
plus de 80 000	21	1 789 486	21 x 50 000 = 1 050 000
Total	1 128	23 690 000	21 832 053

La diminution du coût total est de (23 690 000 – 21 832 053), soit une baisse de 7,84% (en proportion du coût total initial).

Selon vous quel(s) facteur(s) incitent l'assureur à examiner l'instauration d'une franchise et d'une cession en réassurance ?

L'instauration d'une franchise a plusieurs avantages :

- diminuer la prime demandé aux assuré, facteur commercial non négligeable,

- responsabiliser l'assuré qui, conservant une partie du coût des sinistres à sa charge est incité àêtre plus prudent,
- diminuer les frais de gestion des sinistres de l'assureur, qui peuvent représenter une part importante du coût total d'un sinistre pour les « petits » sinistres

Mais ici, est-il commercialement envisageable d'instaurer une franchise de 5000 euros, pour des contrats vendus 600 euros (un peu moins de 500 euros après franchise) ?

La cession en excédent de sinistre semble plus intéressante :
- l'examen de son activité à posteriori amène l'assureur à s'interroger sur la validité des paramètres (voir du modèle) de tarification retenu à priori. En outre, même en supposant la justesse du modèle d'origine, les résultats obtenus apparaissent très fluctuants ce qui peut être dû à la présence, (ou l'absence) de quelques « gros » sinistres, que la taille insuffisante du portefeuille ne permet pas de suffisamment mutualiser. Enfin, le taux moyen de croissance de l'activité permet d'anticiper une sortie à court terme de la zone de « probabilité de ruine négligeable ».

Il y a donc un ensemble de facteur incitant l'assureur à envisager un arbitrage « diminution de l'espérance de résultat / diminution de l'incertitude » par voie de réassurance.

ps : certains d'entre vous ont remarqué que le coût moyen des sinistres de la tranche 70 000 à 80 000 est supérieur à 80 000 (82 172). Cette incohérence est due à un problème d'arrondi dans le modèle ayant servi àréaliser cet énoncé. En majorant d'une unité le nombre de sinistres de la tranche 70/80, porté ainsi à14, et en diminuant d'une unité celui de la tranche plus de 80 (ramené à 20), la cohérence de l'énoncé est rétablie, sans modifier les résultats.