

I –

II – Notations

III – Cours

1. Le mécanisme d'un contrat d'assurance

Par contrat (matérialisé par une police d'assurance), l'assureur s'engage vis à vis d'un assuré, moyennant le paiement d'une prime à verser une prestation en cas de sinistre sur le risque assuré pendant une durée déterminée.

Le mot assureur désigne la société qui supporte le risque (et non l'intermédiaire). Il peut être seul ou agir en co-assurance.

La prime ou cotisation, engagement de l'assuré, sera considéré comme certain et payé au début du contrat.

En actuariat, on ne fait pas la différence entre assuré, souscripteur et bénéficiaire du contrat.

La prestation versée par l'assureur est appelée montant du sinistre (et souvent notée S ou X) : il s'agit d'une variable aléatoire qui peut correspondre à un ou plusieurs sinistres, de montant défini (capital décès), borné (dommages aux biens) ou illimité (responsabilité civile).

2. La mutualisation des risques :

Réduite à un seul contrat, l'opération d'assurance s'apparente à un pari.

Le contrat aléatoire est une convention réciproque dont les effets, quant aux avantages et aux pertes, soit pour toutes les parties, soit pour l'une ou plusieurs d'entre elles, dépendent d'un événement incertain. Tels sont

le contrat d'assurance,

le prêt à grosse aventure,

le jeu et le pari,

le contrat de rente viagère,

Les deux premiers sont régis par les lois maritimes.

(Article 1964 du code civil)

Pour qu'il s'agisse d'une activité économique (rentable), l'assureur traite avec un grand nombre d'assurés. Avec les primes payées par tous les assurés, il paie les sinistres des malchanceux. On dit qu'il compense ou mutualise les risques au sein de la mutualité de ses assurés.

Ce principe de mutualisation se justifie très directement par la théorie des probabilités.

3. Risque de perte et risque de ruine à court terme

Le résultat de l'assureur est très simple : c'est la différence entre les recettes et les dépenses.

Alors que les recettes présentent peu d'incertitude, (tarifs, produits financiers) et que les frais de gestion peuvent également être relativement facilement estimés, la charge des prestations peut présenter une grande incertitude.

Moyennant deux hypothèses, il est possible d'évaluer cette incertitude.

Hypothèse 1 : Risques identiques et indépendants (ou « homogènes » et « peu dépendants ») et en nombre suffisants

Classiquement, les n risques assurés sont supposés identiques et indépendants : les variables aléatoires X_i , ont donc la même loi et sont indépendantes deux à deux.

Cette hypothèse peut-être affaiblie. En particulier, il n'est pas indispensable que les risques soient strictement identiques et indépendants : il suffit qu'ils soient « homogènes » et « peu dépendants », la loi des grands nombres et le théorème central limite pouvant être généralisés à des variables aléatoires non rigoureusement identiques ni rigoureusement indépendantes.

Dans tous les cas il faut veiller à ce que le nombre de risque soit suffisamment grand pour que l'approximation normale soit valable.¹

Ces conditions sont tous à fait respectées en « assurance de masse » (MRH, Automobile).

Hypothèse 2 : tarif « exact »

L'assureur est supposé connaître ex ante l'espérance $E(X)$ de la charge aléatoire de prestations X_i relative au risque i . Il fait donc payer pour chaque risque une prime pure P_i correspondant exactement à cette espérance $E(X_i)$.

$E(X_i) = P_i$, montant connu

Le résultat de l'assureur

Se plaçant au début de la période d'assurance, l'assureur doit, pour les n risques prévoir la charge totale des prestations, ou ce qui revient au même prévoir la charge moyenne. Une fois cette prévision effectuée, l'assureur doit chercher comment rendre « pratiquement impossible » sinon l'éventualité d'une perte, du moins l'éventualité de sa ruine.

L'assureur a principalement comme produits, les primes² versées par les assurés Somme P_i et des produits financiers correspondant au placement des primes PF et comme charges, les prestations éventuellement versées aux assurés $\sum X_i$ et les frais de gestion FG.

¹ On rappelle qu'une loi Binomiale $B(n,q)$ peut être approximée par :

- une loi normale si $n.q > 30$;
- une loi de Poisson si $n.q < 10$;

Son résultat R est donc $R = \text{Somme } P'' - \text{Somme } X_i - (FG - PF)$

La charge des sinistres

La charge des sinistres $\sum X_i$ est une variable aléatoire

Sous l'hypothèse 1 elle a pour espérance $nE(X)$ et pour écart type racine(n)sigma(X)

Selon le théorème central limite, la loi de $\sum X_i$ tend vers une loi normale.

Les primes doivent servir à financer les sinistres, les frais et le bénéfice de l'assureur.

L'usage actuariel traduit cette préoccupation en décomposant chaque prime commerciale P'' en trois parties :

Prime pure $P = E(X)$

(avec l'ensemble des primes pures, l'assureur espère faire face à la charge des prestations) ;

Un chargement de gestion proportionnel à la prime commerciale gP''

(avec l'ensemble des chargements de gestion l'assureur espère faire face à l'ensemble des frais de gestion, ces frais étant diminués des produits des placements)

Un chargement de sécurité proportionnel à la prime pure ηP .

Avec l'ensemble des chargements de sécurité, l'assureur espère faire face à un écart éventuel entre la charge réelle et la charge probable et donc dégager un bénéfice.

$$P'' = P + gP'' + \eta P$$

Son résultat, R est une variable aléatoire :

$$R = \text{somme}(1 + \eta)P_i - \text{somme}(X_i)$$

Remarque : on fait l'hypothèse que les chargement + produits financiers correspondent globalement aux frais de gestion. Cette hypothèse raisonnable devant l'aléa résultat de la sinistralité et dans la mesure où l'assureur peut intervenir pour contenir ses frais nets dans l'enveloppe des chargement alors qu'il lui est difficile de limiter les sinistres de ses assurés.

Remarque : Si l'on veut faire le lien avec la comptabilité, il est important de raisonner en primes « acquises » à l'exercice. Le plus simple est de prendre comme convention que tous les contrats ont une durée d'un an et ont été souscrits au premier janvier de l'année.

Risque de perte, risque de ruine et coefficient de sécurité

La loi des grands nombres nous permet d'affirmer que $1/n \sum X_i \rightarrow E(X)$

L'idée de mutualisation des risques consisterait donc à demander à chaque assuré une prime $P = E(X)$. P est appelée prime pure. L'espérance du résultat $E(R)$ serait nulle.

² Si l'on veut faire le lien avec la comptabilité, il est important de raisonner en primes acquises à l'exercice. Pour simplifier on considère que tous les contrats ont une durée d'un an et ont été souscrits au premier janvier de l'année.

Cependant, $\sum X_i$ reste une variable aléatoire et l'assureur reste exposé à un risque de perte.

Si l'assureur dispose d'un capital initial K , il souhaite éviter, sinon le risque de perte, du moins le risque de ruine.

La ruine de l'assureur se produit si $K + R < 0$, ou encore $R < -K$

L'assureur cherche à rendre l'événement « $R < -K$ » presque impossible.

Le théorème central-limite s'applique à la charge moyenne $S = 1/n \sum X_i$

On suppose que l'on connaît $E(X_i) = P$ et $V(X_i) = \sigma^2$

on a alors : $E(S) = P$ et $V(S) = 1/n \cdot \sigma^2$

et on peut affirmer que $n^{1/2} \cdot (S-P)/\sigma$ tend vers une loi normale centrée réduite.

Or la probabilité de ruine s'écrit :

$$P(R < -K) = P(n(1+\eta)P - nS < -K) = P(n^{1/2}(S-P)/\sigma > (K+n \cdot \eta P)/(n^{1/2}\sigma))$$

Le terme de droite est appelé coefficient de sécurité, noté β :

$$\beta = (K+n \cdot \eta P)/(n^{1/2}\sigma)$$

ce qui peut se réécrire :

$$\beta = (\text{richesse initiale} + \text{espérance de résultat globale}) / \text{écart type du résultat global.}$$

pour $\beta = 3$, la probabilité de ruine est de 0,135%

pour $\beta = 4$, elle est de $2 \cdot 10^{-5}$.

Pour un risque assuré donné, le risque de ruine diminue lorsque β augmente, c'est à dire lorsque :

K augmente (la richesse disponible, ou « marge de solvabilité »)

ou h , le taux de chargement de sécurité, augmente

ou n , le nombre d'assurés croît.

L'augmentation de chacun de ces paramètres se heurte en pratique à des contraintes (commerciales, capitalistiques, ...)

4. les hypothèses utilisées

Ce sont celles du théorème central limite (ou de la limite centrale). Il n'est donc pas indispensable que les risques soient strictement identiques et indépendants. Il suffit qu'ils soient « suffisamment » homogènes et qu'ils soient « approximativement » indépendants.

Il faut d'autre part veiller à ce que le nombre de contrats « homogènes » assurés soit suffisamment grand pour que l'approximation normale soit valable.

Ces conditions sont tout à fait respectées en risques de masse (automobile, multirisques habitation).