

CNAM 2003-2004

Mathématiques actuarielles fondamentales (assurance non vie)

Première série d'exercices

1^{er} exercice

Une société se crée en vendant des contrats couvrant des risques identiques. La prime annuelle est uniformément de $P = 2\,500$; elle donne lieu au versement à la souscription d'une commission de 12% et le coût de gestion administrative est estimé à 50 pour chaque risque, dont 15 représentant un coût immédiat de quittance et 35 étant une dépense régulièrement étalée sur l'année de garantie.

1° une option de paiement semestriel est offerte sous la forme de 2 paiements égaux à P'' . Déterminer leur valeur sachant que ce paiement entraînera une dépense supplémentaire de 15 au début du 2nd semestre, mais que le taux de la commission reste le même, en supposant que la valeur actuelle en début d'année au taux de 3% des paiements nets de commission et de frais de quittance est la même que pour un paiement annuel.

Lors de la souscription, le contrat doit être équilibré :

Prime = Coût du risque + frais d'acquisition + frais de gestion

$2500 = \text{Coût du risque} + 12\% \times 2500 + 50 \Rightarrow \text{Coût du risque} = 2150$.

Paiement en deux fois

Quelle est l'évolution, dans le cas de la trésorerie de la trésorerie ?

Lors de la souscription du contrat, l'assureur reçoit 2500 et dépense immédiatement les frais d'acquisition et de quittance. Il lui reste donc $0,88 \times 2500 - 15 = 2185$ pour payer les sinistres et les frais de gestion.

En cas de paiement en deux fois, l'assureur va disposer de deux primes de P'' .

La valeur actuelle de deux paiements de P'' est $(1 + 1/1,015)P'' = 1,985 P''$

Sur les primes commerciales, 12% vont être payés sous forme de frais d'acquisition, et 2×15 de frais de quittance.

Il va disposer, en valeur actuelle de $1,985 \cdot (0,88P'' - 15)$ pour faire face aux sinistres et frais de gestion évalués à 2135.

D'où l'équation : $2135 = 1,985 \cdot (0,88P'' - 15)$

soit $P'' = 1267$.

2° On suppose maintenant que les paiements sont annuels.

La première année, 10 000 contrats sont souscrits, en suivant le calendrier ci-contre.

Quel est le montant des primes acquises à l'exercice de souscription, nettes de commissions et de charges de gestion ?

Date	Nombre
15 mars	600
15 juin	2 000
15 septembre	2 400
15 décembre	5 000
Total	10 000

Il est d'usage de compter en 24^{ème} (24 quinzaines dans l'année).
 Pour les risques souscrits au 15 mars, il reste 5 quinzaines à courir.
 Pour les risques souscrits au 15 juin, il reste 11 quinzaines à courir.
 Pour les risques souscrits au 15 septembre, il reste 17 quinzaines à courir.
 Pour les risques souscrits au 15 décembre il reste 23 quinzaines à courir.

La proportion des primes non acquise est de : $(5 \times 600 + 11 \times 2000 + 17 \times 2400 + 23 \times 5000) / 10000 / 24 = 75,3\%$. Ou encore une proportion acquises à hauteur de 24,7% du total.

Primes émises totales : 25 000 000, dont 6 166 667 acquises (24,7%).
 Frais d'acquisition : 3 000 000 dont 740 000 imputables à l'exercice (24,7%).
 Frais de gestion immédiats (quittancement) : 150 000 (Frais dépensés immédiatement lors de la souscription du contrat, qui ne sont **pas** des frais d'acquisition, donc). A la différence des frais d'acquisition, les frais de gestion ne sont pas répartis sur la durée du contrat).
 Autres frais de gestion : 86 333 (ces autres frais – salaires, ... - sont dépensés au fur et à mesure. Ils dépendent du nombre de contrats en portefeuille. Si l'on suppose que l'outil de gestion de l'assureur suit exactement l'évolution de son activité – i.e. pas de frais fixes – la proportion du total - 350 000 - dépensée durant la première année est similaire à celle des primes acquises, soit $24,7\% \times 350\ 000 = 86\ 333$).

Primes acquises nettes : 5 190 333.

3° Quels sont, pour cette première année d'activité, les montants de dépenses :
 de commissions ;

$10000 \times 300 \times 24,7\% = 740\ 000 (= 3\ 000\ 000 \times 24,7\%)$

de gestion administrative des contrats ?

$10000 \times 15 + 10000 \times 35 \times 24,7\% = 150\ 000 + 350\ 000 \times 24,7\% = 236\ 333$

Date	Nombre	quinzaines écoulées	restantes		
15-mars	600	19	5	3000	
15-juin	2 000	13	11	22000	
15-sept	2 400	7	17	40800	
15-déc	5 000	1	23	115000	
Total	10 000				
Partie à reporter					75,3%
Partie acquise					24,7%
	Par contrat	Contrats	Taux	trésorerie	
Primes acquises			24,7%	6 166 667	
Primes émises	2500	10000		25 000 000	
Primes non acquises			75,3%	18 833 333	
Frais d'acquisition	300	10000		3 000 000	
Frais d'acquisition reportés			75,3%	2 260 000	
Frais d'acquisition nets			24,7%	740 000	
Frais de quittancement	15	10000		150 000	
Frais autres frais	35	10000	24,7%	86 333	
Frais de gestion totaux				236 333	
					5 190 333

2^{ème} exercice

On envisage des contrats d'un an comportant des primes annuelles versées à la souscription. On suppose que les frais de gestion liés au règlement des sinistres sont échelonnés régulièrement tout au long de l'année d'assurance et qu'ils constituent une proportion φ de la prime émise. Le taux de sinistres à primes est noté T . Enfin, on suppose que la proportion des sinistres de l'année, survenus au cours du k ème mois, est p_k , avec :

$$\sum_{k=1}^{12} p_k = 1$$

1) Montrer que, pour une prime émise au cours du j ème mois, la fraction de cette prime destinée à couvrir les risques portant sur l'année suivante :

$$\varphi \times (j - 0,5) / 12 + T \times (\sum_{k=1}^{j-1} p_k + p_j / 2)$$

- Frais de gestion :
Période restant à courir après le 31/12 = $j-0,5$
D'où fraction de frais à provisionner = $\varphi \times (j - 0,5) / 12$

Tableau des fractions de sinistres

	Mois d'émission			
Mois de sinistre	1	2	j	12
1	$0,5p_1$			
2	p_2	$0,5p_2$		
3	p_3	p_3		
4		p_4		
5	...			
...		...		
j			$0,5p_j$	
$j+1$			p_{j+1}	
...				
11				
12	p_{12}	p_{12}	p_{12}	$0,5p_{12}$
Fraction reportée	$0,5p_1$	$p_1+0,5p_2$	$p_1+...+0,5p_j$	$p_1+p_2+...$

- proportion de sinistres entre le 1/1/n+1 et le 15/j/n+1

$$T \times (\sum_{k=1}^{j-1} p_k + p_j / 2) \text{ (attention } T \text{ est un taux)}$$

$$A = \text{total de la fraction à porter en provision} = \varphi \times (j - 0,5) / 12 + T \times (\sum_{k=1}^{j-1} p_k + p_j / 2)$$

On suppose que les émissions de l'année sont également réparties sur les douze mois et qu'elles interviennent en milieu de mois.

Vérifier que le rapport de la provision calculée avec la méthode du 1) au total annuel des primes est :

S'obtient en calculant la somme de $j = 1$ à $j = 12$ de $A/12$

$$\text{Pour les frais : somme}_{j=1}^{12} (j - 0,5) / 12 / 12 = (12 \times 13 / 2 - 6) / 12 / 12 = 72 / 144 = 0,5$$

Pour les sinistres : la fraction à reporter est, pour chaque mois = 1 – partie acquise.
 soit, pour l'ensemble, 1 – somme des éléments du triangle dans le tableau ci-dessus/12
 (division par douze : chaque mois a apporté un douzième des primes)
 ou encore, en ajoutant 0,5p_j sur chaque case de la diagonale, soit globalement 0,5
 puisque somme(p_j) = 1 : 1 – (somme(triangle composé de p_j entiers) – 0,5) / 12
 Soit le deuxième terme de la formule, en comptant les p_j par ligne.

$$\varphi / 2 + T \times (12,5 - \sum_{k=1}^k p_k) / 12$$

3) Application numérique : $\varphi = 0,12$ et $T = 0,72$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p _k	0,05	0,05	0,06	0,07	0,07	0,10	0,11	0,11	0,10	0,10	0,10	0,08

on trouve provision = 37,98% du total annuel des primes

4) La norme comptable actuellement en vigueur oblige l'assureur à passer en charge du compte de résultat une provision pour primes non acquises calculée au prorata temporis des primes couru au-delà du 31 décembre, le calcul étant fait en net des frais d'acquisition (car ils sont considérés comme immédiatement exposés).

Calculer le montant qui résulte de l'application de la norme comptable si l'assureur estime ses frais d'acquisition à 14% des primes. Commenter les résultats.

La prime commerciale se décompose en : P"-14%. Le solde est reporté prorata temporis, soit dans cet exemple où les primes sont émises linéairement : 50% x 0,86% = 43%.

Ce taux de report est supérieur à celui calculé à la question précédente, qui tenait compte de la saisonnalité du risque à l'intérieur de l'année.

=> a priori prudent pour ce type de risques.

En pratique, l'incertitude principale provient de l'estimation du coût du risque (erreur tarifaire). Ici, en supposant que les frais de gestion sont de 12%, il reste 74% pour couvrir le risque pur. Que se passe-t-il si la sinistralité est en réalité de 78% ? La perte va être partiellement constatée directement à la fin de l'année, et il faudra tenir compte de la poursuite des pertes nées de l'insuffisance tarifaire et constituer une provision pour risques en cours.