

CNAM 2003-2004

Mathématiques actuarielles fondamentales (assurance non vie)

Deuxième série d'exercices - Corrigé

Une entreprise est soumise à un risque assurable qui se traduit par un dommage annuel sur un bien de valeur C égal à $X = T.C$.

T ne peut prendre que les valeurs 0, 10%, 20%, ..., 100%.

La probabilité pour que T soit égal à $0,1k$, pour k variant de 1 à 10, est de la forme $A.p^k$.

1) Quel est la probabilité pour qu'il n'y ait pas de sinistre ?

Quels sont les événements possibles ? Pas de sinistre, où un sinistre de montant 10% xT, ou un sinistre ou un sinistre de montant 20%xT, où un sinistre total.

Tous ces événements sont indépendants, mutuellement exclusifs, et couvrent l'ensemble des possibilités => la somme de leur probabilité est égale à 1.

D'où : proba(Absence de sinistre) = 1 – somme(Proba(k = 1 à 10) T = 0,1k)

$$= 1 - \sum_{k=1}^{10} A.p^k = 1 - A.S \text{ en notant } S = \sum_{k=1}^{10} p^k$$

$$p \times S = \sum_{k=2}^{11} p^k = \sum_{k=1}^{10} p^k - p + p^{11}$$

$$= S - p + p^{11} \text{ d'où } S = \frac{p - p^{11}}{1 - p}$$

$$\text{Proba(absence de sinistre)} = 1 - A \frac{p - p^{11}}{1 - p}$$

Application numérique si $p=0,8$ et $A=0,014$?

$$p = 0,8 \Rightarrow S = 3,57$$

$$A.S = 5\%$$

Probabilité d'absence de sinistre = 95%

2) Donner l'espérance mathématique de X en fonction de C, A et p.

Quel est le coût du risque pour l'assureur ?

10%.C avec une probabilité de A.p . L'espérance de ce risque individuel est 10%.C.A.p

20%.C avec une proba. de A.p². L'espérance de ce risque individuel est 20%.C.A.p²

...

100%.C avec une prob. A.p¹⁰. L'espérance de ce risque individuel est 100%.C.A.p¹⁰.

Les risques étant mutuellement exclusifs, les espérances s'additionnent.

$$E(X) = 0,1.C.A \sum_{k=1}^{10} .k.p.k$$

en notant D la somme, $D = \sum_{k=1}^{10} .k.p.k = p \sum_{k=1}^{10} .k.p.k^{-1}$

$D = p. S'$ (dérivée par rapport à p de la somme du premièrement).

$$S' = [(1-11p^{10}).(1-p) - (-1).(p-p^{11})] / (1-p)^2 = (1 - 11p^{10} + 10p^{11}) / (1-p)^2$$

d'où $E(X) = 0,1.C.A.p. (1 - 11p^{10} + 10p^{11}) / (1-p)^2$

L'assureur qui accepte de prendre en charge la totalité du risque tarifie sur la base de $E(X)$ qu'il majore de 30% ; Quel est la prime P'' demandée, lorsque $C=50$ M€ pour les valeurs de A et p indiquées au 1) ?

Avec $p = 0,8$, $S' = 16,95$

$D = 13,56$

$0,1.C.A = 0,07$

$E(X) = 0,94\ 903$ millions d'euros.

La prime commerciale de l'assureur est $P'' = 130\%.E(X)$, soit **1,234** millions d'euros.

- 3) L'entreprise détermine ses choix en utilisant une fonction d'utilité de la forme $u(W) = a-b.\exp^{(-\tau.W)}$, ou W est la situation de fortune, a , b et τ étant des paramètres positifs.

Vérifier qu'elle correspond à une attitude d'aversion au risque.

Aversion au risque : il faut que la fonction d'utilité soit concave (dérivée positive et dérivée seconde négative)

$$u(W) = a-b.\exp^{(-\tau.W)},$$

$$u'(W) = b\tau.\exp^{(-\tau.W)} > 0$$

$$u''(W) = -b\tau^2.\exp^{(-\tau.W)} < 0$$

U est bien concave.

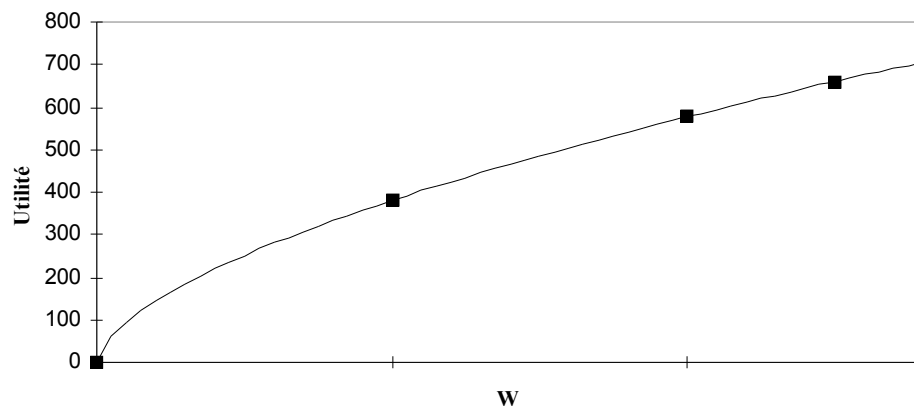
Elle est représentative d'une attitude d'aversion au risque (risquophobe)

Ce qui en termes statistiques s'écrit :

$$U(E(W)) > E(U(W))$$

Et, graphiquement, cela s'interprète : $U(E(W))$ est sur la courbe tandis que $E(U(W))$ est une moyenne pondérée (par les probabilités d'obtenir une fortune W) des points de la courbe. La courbe étant concave, la moyenne pondérée est forcément en dessous de la courbe.

Fonction d'utilité



Quelles sont les valeurs aléatoires de la situation de fortune lorsque la fortune est initialement égale à K et qu'elle peut être entamée par les dommages décrits précédemment, quand il n'y a pas d'assurance ?

Après une année sans assurance, la situation de fortune est la variable aléatoire $W = K - X$ qui a la distribution :

$K - X = K$ avec une probabilité de 95%.

$K - X = K - k.C/10$ avec une probabilité $A.p^k$ (pour $k = 1$ à 10)

Remarque : $K - X = K$ peut se réécrire $K - X = K - k.C/10$ avec $k = 0$

$$E(U(W)) = \text{somme}(\text{Proba}(k = 0 \text{ à } 10) \cdot (a - b \cdot \exp^{(-\tau \cdot (K - kC/10))}))$$

$$= a - b \cdot \text{somme}(\text{Proba}(k = 0 \text{ à } 10) \cdot \exp^{(-\tau \cdot (K - kC/10))})$$

$$= a - b \cdot \exp^{(-\tau \cdot K)} (\text{Proba}(k = 0) + A \cdot \text{somme}_{k=1 \text{ à } 10} (p^k \exp^{(\tau \cdot kC/10)}))$$

$$= a - b \cdot \exp^{(-\tau \cdot K)} (\text{Proba}(k = 0) + A \cdot \text{somme}_{k=1 \text{ à } 10} ((p \exp^{(\tau \cdot C/10)})^k))$$

en posant $p' = p \exp^{(\tau \cdot C/10)}$ la formule devient :

$$E(U(W)) = a - b \cdot \exp^{(-\tau \cdot K)} \cdot (\text{Proba}(k = 0) + A \cdot p' \cdot (1 - p'^{10}) / (1 - p'))$$

Calculer l'espérance de $a - b \cdot \exp^{(-\tau \cdot W)}$ pour $K = 20M€$ et $\tau = 0,05$.

(Calculons en millions d'euros)

$$p' = p \exp^{(\tau \cdot C/10)} = 0,8 \cdot \exp(0,05 \times 50 / 10) = 1,027$$

$$(1 - p'^{10}) / (1 - p') = 11,318$$

$$E(U(W)) = a - b \cdot \exp^{(-0,05 \cdot 20)} \times (0,95 + 0,014 \cdot 1,027 \cdot 11,318)$$

$$E(U(W)) = a - b \cdot 0,40936$$

qui est la formule s'appliquant sans assurance.

- 4) L'entreprise cherche à savoir si elle doit s'assurer en utilisant le critère de maximisation de l'utilité espérée.

Quelle est alors sa décision ?

Y-a-t'il une possibilité autre que l'alternative non-assurance ou assurance intégrale ?

Avec assurance, la situation de fortune devient, de manière certaine : $K - P'' = 18,766$

L'utilité associée est :

$$U(W) = a - b \times \exp(-0,05 \cdot 18,766)$$

$$\mathbf{E(U(W)) = a - b \times 0,39129}$$

qui est supérieure au résultat sans assurance. La décision rationnelle, pour un choix binaire assurance / non assurance est de s'assurer.

Une autre possibilité serait de choisir une assurance partielle, par exemple une proportion θ du sinistre X .