CNAM 2002-2003

<u>Mathématiques actuarielles fondamentales (assurance non vie)</u>

<u>Troisième série d'exercices – éléments de corrigé</u>
(cf. également classeur Excel : cor3.xls)

A – Coefficient de sécurité

Un risque présente les caractéristiques suivantes :
la charge annuelle des sinistres X a une espérance mathématique de 500 euros et un écart type de 2000 euros. Un assureur, disposant d'une marge de sécurité K, se propose de gérer n contrats couvrant des risques indépendants et identiques à celui que l'on vient de décrire, en ajoutant à la prime pure un chargement de sécurité dont le pourcentage est ρ.

1) Quel est la valeur du coefficient de sécurité β lorsque K = 200 000 euros, ρ = 5% et n = 3000 ?

<u>Rappel de la théorie</u>

Proba(non ruine après un an) = P(R > -K) avec R = Résultat et K = richesse disponible
= Proba($nP+n\rho P-\sum X_i > -K$) ou P représente la prime pure, ρ le taux de chargement de sécurité et X_i les sinistres individuels
= Proba($\sum X_i - nP < K+n\rho P$)
= Proba($(\sum X_i - nP)/\sigma_{\sum Xi} < (K+n\rho P)/\sigma_{\sum Xi}$) et ici $\sigma_{\sum Xi} = \sqrt{n}.\sigma_X$ = car les risques sont indépendants. En remplaçant cette expression, puis en divisant les parties gauche et droite de l'inégalité par $\sqrt{n}$, on obtient :

= Proba((moyenne(X) – P)/σ_X < $(K+n\rho P)/ \sqrt{n}\sigma_X$)

La partie gauche converge vers une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ (théorème central limite). La partie droite correspond à la définition du coefficient β .

= $\Pi(\beta)$ *ou Π est la fonction de répartition de la loi de Gauss (ou loi normale).*
<u>Remarque :</u> sous Excel, correspond à la fonction loi.normale.standard(β)

Application numérique :

β *= (200 000 + 3000.5%.500) / (racine(3000).2000) =2,51*

$\Pi(\beta)$ *= 0,994 ou encore une probabilité de ruine de 0,6% ce qui est trop élevé.*

2) On veut avoir un coefficient de sécurité $\beta > 4$.

Un coefficient de sécurité $\beta > 4$ correspond à une probabilité de ruine inférieure à 1/10000 ($\Pi(4) = 0,0032\%$).

Un cherche donc $\beta = (K+n\rho P)/\sqrt{n}\sigma_X \geq 4$.

a. Quel doit être la marge K pour ρ = 5% et n = 3000 ?

$K \geq 4.\sqrt{n}\sigma_X - n\rho P$ = 4.racine(3000).500 – 3000.5%.500 = 363 178.

b. Quel doit être le coefficient de sécurité ρ pour K = 200 000 euros et n = 3000 ?

$\rho \geq (4.\sqrt{n}\sigma_X - K) / nP$ = (4.racine(3000).500 – 200 000)/(3000.500) = 15,9%.

c. Quel devrait être le nombre de risques à gérer n pour K = 200 000 euros et ρ = 5% ?

$n.P.\rho - 4.\sqrt{n}\sigma_X + K \geq 0$.

Soit une inéquation du second degré en racine(n).
Le déterminant $(4.\sigma_X)^2 - 4.P.\rho.K$ = 44 000 000 est positif : deux solutions.

($4.\sigma_X \pm$ racine(determinant))/(2. $P.\rho$)

racine(n) $\leq$ 27, soit n $\leq$ 747 (c'est pratiquement l'inactivité)

racine(n) $\geq$ 293, soit n $\geq$ 85 653 (c'est un objectif sans doute impossible)

Deux remarques :
- aucune des trois solutions n'est vraiment réaliste. La véritable solution à ce genre de problèmes réside dans la souscription d'une réassurance (diminuer beaucoup le risque en perdant un peu d'espérance de bénéfice).

- la partie difficile de cette modélisation réside dans l'estimation de σ_X. Une part importante du cours sera consacrée à ce problème.

B – Fusion d'activités

Une entreprise gère un risque en allouant à cette activité un montant K_1 de fonds propres.
L'espérance des résultats annuels globaux de cette catégorie d'assurance est $\rho_1 U_1$, en notant U_1 l'espérance annuelle de la charge des sinistres , et leur variance est T_1^2.

1) Donner l'expression du coefficient de sécurité β_1 lorsque $K_1 = 20\%.U_1$. Application numérique pour $U_1 = 1000$, $\rho_1 = 15\%$ et $T_1 = 100$?

Rappel de la théorie
$\beta = (K+n\rho P)/\sigma_{\sum Xi}$ = *(Fonds propres + E(résultat annuel)) /* $\sigma_{résultat\ annuel}$

$\beta_1 = (K_1+\rho_1 U_1)/T_1 = 35\%.U_1/T_1 = 3,5$

$\Pi(\beta_1)$ *= 0,9998 ou encore une probabilité de ruine de 0,023%.*

2) L'entreprise absorbe une compagnie qui exerçait le même type d'activité, avec un montant de primes pures $U_2 = 750$, une allocation de fonds propres de K_2=20%, un taux moyen de chargements de sécurité ρ_2 =10% et T = 87. Quel était le coefficient de sécurité β_2 pour cette société ?

$\beta_2 = (K_2+\rho_2 U_2)/T_2 = 30\%.U_2/T_2 = 2,586$

$\Pi(\beta_2)$ *= 0,9951 ou encore une probabilité de ruine de 0,485%.*

Les résultats vont s'ajouter après fusion et on considère qu'on peut allouer à la garantie des opérations globales $K_1+ K_2$. Quel est le coefficient de sécurité correspondant ?

$\beta_3 = (K_1+ K_2+\rho_1 U_1+\rho_2 U_2)/racine(T_1^2+T_2^2) = 4,338$

$\Pi(\beta_3)$ *= 0,999993 ou encore une probabilité de ruine de 0,0007%.*

3) Considérant qu'un coefficient de sécurité = 4 est suffisant, quel montant de fonds propres peut être libéré grâce à la fusion ?

$K = \beta.\sigma_{résultat\ annuel}$ - *E(résultat annuel)*
$K = 4.\ racine(T_1^2+T_2^2) - \rho_1 U_1 - \rho_2 U_2 = 305,2$

On peut donc « libérer » 200 + 150 – 305,2 = 44,8 tout en conservant un ensemble plus sûr que la plus sûre des deux entreprises initiales.