CNAM 2002-2003

Mathématiques actuarielles fondamentales (assurance non vie)

Quatrième série d'exercices – éléments de corrigé

A – Traité aggregate loss

Une catégorie d'assurance est caractérisée par une distribution des charges de sinistres exponentielles telle que :
Proba(Y <= y0) = 0
Proba(Y > y) = $e^{-C(y-y0)}$, où C est un paramètre positif inconnu.

1) *Déterminer, en fonction de C et de y0 les expressions de E(Y) et de Var(Y)*

Proba(Y > y) = $e^{-C(y-y0)}$ = Proba(Y-y0 > y-y0)

Posons T = Y-y0.
La densité de T est (1- e^{-CT})' = C e^{-CT}

$$E(T)=\int_0^\infty t.c e^{-Ct}\,dt$$

En dérivant t.e^{-Ct} :
(t.e^{-Ct})' = e^{-Ct} –C.t.e^{-Ct}
et e^{-Ct}' = -1/C.(e^{-Ct})'

$$E(T)=-\int_0^\infty (t.c e^{-Ct})'dt-\frac{\int_0^\infty e^{-Ct}{}'dt}{C}=-\left[t.c e^{-Ct}\right]_0^\infty-\left[\frac{e^{-Ct}}{C}\right]_0^\infty=[0-0]-[0-\frac{1}{C}]=\frac{1}{C}$$

de même Var(T) = E(T²)-E(T)²
E(T²) = 2/C² (en dérivant (t².e^{-Ct})' =2.t.e^{-Ct} - C t².e^{-Ct})

$$E(T^2)=-\int_0^\infty (t^2.c e^{-Ct})'dt+\frac{2.E(T)}{C}=-[0-0]+\frac{2}{C^2}=\frac{2}{C^2}$$

Var(T) =1/C²

Ou encore

E(Y-y0) = 1/C et var(Y-y0) = 1/C²
D'où : E(Y) = y0 + 1/C
Et Var(Y) = 1/C²

Application numérique : calculer C et y0 pour que E(Y) = 2 500 € et σ_y = 2 000 €.
Application numérique :

σ_y = 2 000 €. => C = 1/2000 = 5.10^{-4}
E(Y) = 2500 => y0 = E(Y) – 1/C = 2500 – 2000 = 500

2) *Un réassureur prend en charge la charge de sinistres au delà d'une priorité M > y0. Quelle est l'espérance de la charge de sinistre pour le réassureur ?*

$$E(R)=\int_M^{\infty}(t-M).c e^{-C(t-y0)}dt = e^{-C(M-y0)}\int_M^{\infty}(t-M).c e^{-C(t-M)}dt$$

Comme au premièrement, l'intégrale de droite vaut 1/C (par un changement de variable (u = y – M : M joue alors le même rôle que y0 dans le 1°)

Et donc $E(R) = (1/C).e^{-C(M-y0)}$

Application numérique : M = 5 000 €, C et y0 sont ceux calculés au 1).

E(R) = 210,80

B – Traité en excédent de pertes

On considère que pour une catégorie d'assurances, le taux annuel de sinistres à primes T (rapport entre la charge annuelle de sinistres et l'encaissement) est approximativement une variable normale d'espérance μ *et d'écart type* σ*.*

Un traité stop-loss met à la charge d'un réassureur l'excédent éventuel de sinistres au delà d'un seuil T = A, avec un plafond d'intervention T = B.

Précisément, le pourcentage de l'encaissement du cédant à la charge du réassureur est :

0	*si T < A ;*
T – A	*si A < T < B ;*
B – A	*si T > B .*

Le taux de S/P est modélisé par une variable aléatoire T ~> N(μ,σ) ou S représente la charge des sinistres et P les primes afférentes.

- Le réassureur garanti a priori que T net de réassurance ne dépassera par une valeur A.
- La garantie du réassureur est plafonnée à B-A

1) *Exprimer la prime pure de réassurance en proportion de l'encaissement annuel à partir de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite* f(z) *et de sa*

$$f(z;0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

fonction de répartition Φ.

La prime pure de réassurance est égale à l'espérance de la charge des sinistres pris par le réassureur, soit :

E(sinistres à charge du réassureur) =

$$encaissements.\int_A^B (t-A).proba(t<T<t+dt)+\int_B^{\infty}(B-A).proba(t<T<t+dt)$$

En proportion des encaissements, la prime pure de réassurance est :

$$\int_A^B (t-A).\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt+\int_B^{\infty}(B-A).\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$$

Car T est approximé par une loi normale.

On revient à une loi normale centrée réduite par le changement de variable :

z = (*t*-μ)/σ soit dz = dt/σ *Ou encore : t* = σ*z*+μ .

Le taux de prime pure se réécrit :

$$=\int_{\frac{A-\mu}{\sigma}}^{\frac{B-\mu}{\sigma}}(z\sigma+\mu-A).\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz+\int_{\frac{B-\mu}{\sigma}}^{\infty}(B-A).\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$=\int_{\frac{A-\mu}{\sigma}}^{\frac{B-\mu}{\sigma}}(z\sigma+\mu-A).f(z,0,1)dz+\int_{\frac{B-\mu}{\sigma}}^{\infty}(B-A).f(z,0,1)dz$$

$$=\sigma\int_{\frac{A-\mu}{\sigma}}^{\frac{B-\mu}{\sigma}}z.f(z,0,1)dz+(\mu-A).\int_{\frac{A-\mu}{\sigma}}^{\frac{B-\mu}{\sigma}}f(z,0,1)dz+(B-A)\int_{\frac{B-\mu}{\sigma}}^{\infty}f(z,0,1)dz$$

Les deux derniers termes peuvent s'exprimer en sous forme de la fonction de répartition Φ *:*

$$(\mu-A).[\Phi(\frac{B-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{A-\mu}{\sigma})]+(B-A)[\Phi(+\infty)-\Phi(\frac{B-\mu}{\sigma})]$$

Pour le premier terme, on remarque que df(z,0,1) =-z.f(z).dz et donc que le premier terme se réécrit :

$$\sigma\int_{\frac{A-\mu}{\sigma}}^{\frac{B-\mu}{\sigma}}df(z,0,1)=\sigma[f(\frac{A-\mu}{\sigma},0,1)-f(\frac{A-\mu}{\sigma},0,1)]$$

D'où un taux de prime de réassurance :

$$=\sigma[f(\frac{A-\mu}{\sigma},0,1)-f(\frac{B-\mu}{\sigma},0,1)]+(\mu-A).[\Phi(\frac{B-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{A-\mu}{\sigma})]+(B-A)[\Phi(+\infty)-\Phi(\frac{B-\mu}{\sigma})]$$

$$=\sigma[f(\frac{A-\mu}{\sigma},0,1)-f(\frac{B-\mu}{\sigma},0,1)]+\Phi(\frac{A-\mu}{\sigma}).(A-\mu)+\Phi(\frac{B-\mu}{\sigma})(\mu-B)+(B-A)$$

2) Application numérique pour μ = 60%, σ = 40%, A = 100% et B = 180%

$(A-\mu)/\sigma$ = (100-60)/40 = 1

$(B-\mu)/\sigma$ = (180-60)/40 = 3

Taux de prime = 40%[f(1,0,1)-f(3,0,1)] + 40%.Φ(1) – 120%.Φ(3) + 80%.

Z	f(z,0,1)	Φ(z,0,1)
1	0,24197	0,84134
2	0,05399	0,97725
3	0,00443	0,99865

(sous Excel : f(z,0,1) = loi.normale(z;0;1;FAUX) et Φ(z,0,1)= loi.normale.standard(z))

Résultat : 3,317%

<u>Trois remarques :</u>

1) On peut facilement trouver un majorant grossier du taux de primes pour vérifier la cohérence du résultat : (B-A) x proba(T > A) qui signifie : le réassureur paie au plus (B-A) x il n'intervient qu'au delà de A.

Proba(T > A) = Proba($(T-\mu)/\sigma > (A-\mu)/\sigma$) = 1 – Φ ($(A-\mu)/\sigma$)
Soit 80%x(1-0,84134) = 12,7%

2) Si B = infini (couverture illimitée). $f(B-\mu)/\sigma) = 0$ et $\Phi((B-\mu)/\sigma) = 1$ la formule se simplifie en :

$$=\sigma[f(\frac{A-\mu}{\sigma},0,1)]+(\mu-A).[1-\Phi(\frac{A-\mu}{\sigma})]$$

Si on refait l'application numérique, on trouve un taux de prime de 3,333%

3) Les cédantes aimerait bien ce genre de traités (qui offre une bonne protection), mais les réassureurs ne les apprécient pas trop : ils n'incitent pas les cédantes à une politique rigoureuse de sélection et de tarif.

En fait on les rencontre assez peu, hors cas particuliers : assurance grèle, réassurance interne à un groupe, …