

CNAM 2003-2004

Mathématiques actuarielles fondamentales (assurance non vie)

Cinquième série d'exercice – Eléments de corrigé

Soit une population segmentée selon deux critères : le sexe de l'assuré et le groupe de véhicules (avec deux groupes possibles). La répartition des assurés est la suivante :

	Femmes	Hommes
Groupe 1	40 000	20 000
Groupe2	10 000	30 000

L'espérance de la charge annuelle de sinistres par assuré (prime pure annuelle) dépend des deux critères précédents : elle est donnée par le tableau suivant.

	Femmes	Hommes	Ensemble
Groupe 1	250	100	
Groupe2	425	525	
Ensemble			

1. Compléter le tableau des primes pures

cf. tableaux ci-dessous.

Les primes pures permettent de calculer l'espérance de la charge annuelle de sinistre par sous ensemble d'assurés (prime pure par assuré x nombre d'assurés dans le sous ensemble). En sens inverse, les espérances de charge globale par sous ensemble permettent d'effectuer des regroupements différents et de calculer les primes pures associées. Ainsi, 60 000 véhicule « groupe1 » sont assurés (40 000 + 20 000). La charge globale attendue pour ces véhicules est de 12 000 000 (10 000 000 + 2 000 000). La prime pure « groupe1 » est donc de 200 (12 000 000 / 60 000).

	Femmes	Hommes	Ensemble
Groupe 1	40 000	20 000	60 000
Groupe2	10 000	30 000	40 000
Ensemble	50 000	50 000	100 000
Espérance de charge globale			
	Femmes	Hommes	Ensemble
Groupe 1	10 000 000	2 000 000	12 000 000
Groupe2	4 250 000	15 750 000	20 000 000
Ensemble	14 250 000	17 750 000	32 000 000
	Femmes	Hommes	Ensemble
Groupe 1	250	100	200
Groupe2	425	525	500
Ensemble	285	355	320

Deux assureurs A et B tarifient à la prime pure. On suppose que les assurés choisissent tous le tarif le moins cher.

2. A n'utilise pas de critère de tarification tandis que B n'utilise que le critère homme / femme.

a. Quels sont les tarifs proposés par A et B ?

A tarifie à la prime pure d'ensemble, soit 320. B tarifie les femmes à la prime pure « femmes », soit 285 et les hommes à la prime pure « homme » soit 355.

Pour ces deux assureurs, les opérations seraient à priori équilibrées si la totalité des assurés s'assuraient chez eux.

b. Qui s'assure chez qui ?

Les assurés choisissent en fonction du critère prix. Toutes les femmes s'assurent chez B et tous les hommes chez A.

c. Quel est le chiffre d'affaires de A et de B ?

A assure tous les hommes (50 000) en échange d'une prime de 320 => chiffres d'affaires = 50 000 x 320 = 16 000 000.

Idem pour B : 50 000 x 285 = 14 250 000.

d. Quelle est l'espérance de gain de A et de B ?

A assurant tous les hommes, son espérance de charge annuelle est celle du sous ensemble « hommes », soit 17 750 000. Comparé à ses recettes (16 000 000) son espérance de gain (en fait de perte) est de - 1 750 000.

Idem pour B : 14 250 000 (espérance de charge annuelle du sous ensemble « femmes ») - 14 250 000 (recettes) = 0.

2a) Tarifs assureur A

	Femmes	Hommes
Groupe 1	320	320
Groupe2	320	320

Tarifs assureur B

	Femmes	Hommes
Groupe 1	285	355
Groupe2	285	355

2b) Portefeuille assuré par A

	Femmes	Hommes	Ensemble
Groupe 1	0	20 000	20 000
Groupe2	0	30 000	30 000
Ensemble	0	50 000	50 000

Portefeuille assuré par B

	Femmes	Hommes	Ensemble
Groupe 1	40 000	0	40 000
Groupe2	10 000	0	10 000
Ensemble	50 000	0	50 000

2c) Chiffre d'affaires de A

	Femmes	Hommes	Ensemble
Groupe 1	0	6 400 000	6 400 000
Groupe2	0	9 600 000	9 600 000
Ensemble	0	16 000 000	16 000 000

Chiffre d'affaires de B

	Femmes	Hommes	Ensemble
Groupe 1	11 400 000	0	11 400 000
Groupe2	2 850 000	0	2 850 000
Ensemble	14 250 000	0	14 250 000

2d) Espérance de charge globale pour A

	Femmes	Hommes	Ensemble
Groupe 1	0	2 000 000	2 000 000
Groupe2	0	15 750 000	15 750 000
Ensemble	0	17 750 000	17 750 000

Espérance de charge globale pour B

	Femmes	Hommes	Ensemble
Groupe 1	10 000 000	0	10 000 000
Groupe2	4 250 000	0	4 250 000
Ensemble	14 250 000	0	14 250 000

Espérance de gain de A

-1 750 000

Espérance de gain de B

0

3. A décide d'introduire le critère du groupe du véhicule

a. b. c. d. : mêmes questions

3a) Tarifs assureur A

	Femmes	Hommes
Groupe 1	200	200
Groupe2	500	500

Tarifs assureur B

	Femmes	Hommes
Groupe 1	285	355
Groupe2	285	355

3b) Portefeuille assuré par A

	Femmes	Hommes	Ensemble
Groupe 1	40 000	20 000	60 000
Groupe2	0	0	0
Ensemble	40 000	20 000	60 000

Portefeuille assuré par B

	Femmes	Hommes	Ensemble
Groupe 1	0	0	0
Groupe2	10 000	30 000	40 000
Ensemble	10 000	30 000	40 000

3c) Chiffre d'affaires de A

	Femmes	Hommes	Ensemble
Groupe 1	8 000 000	4 000 000	12 000 000
Groupe2	0	0	0
Ensemble	8 000 000	4 000 000	12 000 000

Chiffre d'affaires de B

	Femmes	Hommes	Ensemble
Groupe 1	0	0	0
Groupe2	2 850 000	10 650 000	13 500 000
Ensemble	2 850 000	10 650 000	13 500 000

3d) Espérance de charge globale pour A

	Femmes	Hommes	Ensemble
Groupe 1	10 000 000	2 000 000	12 000 000
Groupe2	0	0	0
Ensemble	10 000 000	2 000 000	12 000 000

Espérance de charge globale pour B

	Femmes	Hommes	Ensemble
Groupe 1	0	0	0
Groupe2	4 250 000	15 750 000	20 000 000
Ensemble	4 250 000	15 750 000	20 000 000

Espérance de gain de A

0

Espérance de gain de B

-6 500 000

B réplique en introduisant également le critère du groupe du véhicule

a. b. c. d. : mêmes questions

4a) Tarifs assureur A

	Femmes	Hommes
Groupe 1	200	200
Groupe2	500	500

Tarifs assureur B

	Femmes	Hommes
Groupe 1	250	100
Groupe2	425	525

4b) Portefeuille assuré par A

	Femmes	Hommes	Ensemble
Groupe 1	40 000	0	40 000
Groupe2	0	30 000	30 000
Ensemble	40 000	30 000	70 000

Portefeuille assuré par B

	Femmes	Hommes	Ensemble
Groupe 1	0	20 000	20 000
Groupe2	10 000	0	10 000
Ensemble	10 000	20 000	30 000

4c) Chiffre d'affaires de A

	Femmes	Hommes	Ensemble
Groupe 1	8 000 000	0	8 000 000
Groupe2	0	15 000 000	15 000 000
Ensemble	8 000 000	15 000 000	23 000 000

Chiffre d'affaires de B

	Femmes	Hommes	Ensemble
Groupe 1	0	2 000 000	2 000 000
Groupe2	4 250 000	0	4 250 000
Ensemble	4 250 000	2 000 000	6 250 000

4d) Espérance de charge globale pour A

	Femmes	Hommes	Ensemble
Groupe 1	10 000 000	0	10 000 000
Groupe2	0	15 750 000	15 750 000
Ensemble	10 000 000	15 750 000	25 750 000

Espérance de charge globale pour B

	Femmes	Hommes	Ensemble
Groupe 1	0	2 000 000	2 000 000
Groupe2	4 250 000	0	4 250 000
Ensemble	4 250 000	2 000 000	6 250 000

Espérance de gain de A

-2 750 000

Espérance de gain de B

0

4. B fait une erreur de tarification en proposant la grille tarifaire suivante

	Femmes	Hommes
Groupe 1	265	82
Groupe2	365	537

a. b. c. d. : mêmes questions

5a) Tarifs assureur A

	Femmes	Hommes
Groupe 1	200	200
Groupe2	500	500

Tarifs assureur B

	Femmes	Hommes
Groupe 1	265	82
Groupe2	365	537

5b) Portefeuille assuré par A

	Femmes	Hommes	Ensemble
Groupe 1	40 000	0	40 000
Groupe2	0	30 000	30 000
Ensemble	40 000	30 000	70 000

Portefeuille assuré par B

	Femmes	Hommes	Ensemble
Groupe 1	0	20 000	20 000
Groupe2	10 000	0	10 000
Ensemble	10 000	20 000	30 000

5c) Chiffre d'affaires de A

	Femmes	Hommes	Ensemble
Groupe 1	8 000 000	0	8 000 000
Groupe2	0	15 000 000	15 000 000
Ensemble	8 000 000	15 000 000	23 000 000

Chiffre d'affaires de B

	Femmes	Hommes	Ensemble
Groupe 1	0	1 640 000	1 640 000
Groupe2	3 650 000	0	3 650 000
Ensemble	3 650 000	1 640 000	5 290 000

5d) Espérance de charge globale pour A

	Femmes	Hommes	Ensemble
Groupe 1	10 000 000	0	10 000 000
Groupe2	0	15 750 000	15 750 000
Ensemble	10 000 000	15 750 000	25 750 000

Espérance de charge globale pour B

	Femmes	Hommes	Ensemble
Groupe 1	0	2 000 000	2 000 000
Groupe2	4 250 000	0	4 250 000
Ensemble	4 250 000	2 000 000	6 250 000

Espérance de gain de A

-2 750 000

Espérance de gain de B

-960 000

5. Quelles seraient les primes pures issues d'un modèle additif ?

Dans le modèle additif, on va chercher à modéliser l'influence « femme » (notée a1) « homme » (notée a2), « Véhicule du groupe 1 » (notée b1) et « Véhicule du groupe 2 » (notée b2) par rapport à la prime pure d'ensemble (ici 320) avec comme contraintes que les charges globales de sinistres attendues selon un critère demeurent préservées.

	Femmes	Hommes	Contrainte
Groupe 1	$320+a1 + b1$	$320+a2 + b1$	$40\ 000x(320+a1+b1) + 20\ 000x(320+a2+b1) = 12\ 000\ 000$
Groupe 2	$320+a1 + b2$	$320+a2 + b2$	$10\ 000x(320+a1+b2) + 30\ 000x(320+a2+b2) = 20\ 000\ 000$
Contrainte	$40\ 000x(320+a1+b1) + 10\ 000x(320+a1+b2) = 14\ 250\ 000$	$20\ 000x(320+a2+b1) + 30\ 000x(320+a2+b2) = 17\ 750\ 000$	

Ces contraintes se réécrivent :

$$b1 = (-7\ 200\ 000 - 40\ 000a1 - 20\ 000a2)/60\ 000$$

$$b2 = (7\ 200\ 000 - 10\ 000a1 - 30\ 000a2)/40\ 000$$

$$a1 = (-1\ 750\ 000 - 40\ 000b1 - 10\ 000b2)/50\ 000$$

$$a1 = (1\ 750\ 000 - 20\ 000b1 - 30\ 000b2)/50\ 000$$

Appliquons la méthode itérative des marges.

1^{ère} itération :

fixons $a1 = a2 = 0$ (pas d'influence femme/homme)

$a1 = 0$ et $a2 = 0 \Rightarrow b1 = -120$ et $b2 = 180$

2^{ème} itération :

$b1 = -120$ et $b2 = 180 \Rightarrow a1 = 25$ et $a2 = -25$

$a1 = 25$ et $a2 = 25 \Rightarrow b1 = -128,33$ et $b2 = 192,50$

etc... jusqu'à convergence des valeurs (à la 6^{ème} itération)

	Itération 1	Itération 2	Itération 3	Itération 4	Itération 5	Itération 6	Itération 7
b1	-120	-128,33	-129,72	-129,95	-129,99	-130,00	-130,00
b2	180	192,50	194,58	194,93	194,99	195,00	195,00
a1	0	25,00	29,17	29,86	29,98	30,00	30,00
a2	0	-25,00	-29,17	-29,86	-29,98	-30,00	-30,00

Ce qui nous donne des primes pures :

	Femmes	Hommes
Groupe 1	$320+30-130 = 220$	$320-30-130 = 160$
Groupe2	$320+30+195 = 545$	$320-30+195 = 485$

Et des charges de sinistre attendues :

Espérance de charge globale			
	Femmes	Hommes	Ensemble
Groupe 1	8 800 000	3 200 000	12 000 000
Groupe2	5 450 000	14 550 000	20 000 000
Ensemble	14 250 000	17 750 000	32 000 000

6. Quelles seraient les primes pures issues d'un modèle multiplicatif ?

On répète le même raisonnement, en remplaçant la modélisation additive par une modélisation multiplicative :

	Femmes	Hommes	Contrainte
Groupe 1	320.a1.b1	320.a2.b1	40 000x(320.a1.b1) + 20 000x (320.a2.b1) = 12 000 000
Groupe 2	320.a1.b2	320.a2.b2	10 000x(320.a1.b2) + 30 000x (320.a2.b2) = 20 000 000
Contrainte	40 000x(320.a1.b1) + 10 000x(320.a1.b2) = 14 250 000	20 000x(320.a2.b1) + 30 000x(320.a2.b2) = 17 750 000	

Ces contraintes se réécrivent :

$$b1 = 120/(128.a1 + 64.a2)$$

$$b2 = 200/(32.a1+96.a2)$$

$$a1 = 1\,425/(1280.b1 + 320.b2)$$

$$a2 = 1\,775/(640.b1 + 960.b2)$$

De même, on peut trouver une solution itérative en partant de $a1 = a2 = 1$ (absence d'influence du critère « femme/homme ») :

	Itération 1	Itération 2	Itération 3	Itération 4	Itération 5	Itération 6	Itération 7
b1	0,63	0,5997	0,5955	0,5948	0,5947	0,5946	0,5946
b2	1,56	1,6031	1,6099	1,6111	1,6112	1,6113	1,6113
a1	1	1,0962	1,1128	1,1155	1,1160	1,1161	1,1161
a2	1	0,9342	0,9232	0,9213	0,9210	0,9209	0,9209

Ce qui nous donne un tableau des primes pures :

	Femmes	Hommes
Groupe 1	320.1.1161 .0,5946 = 212,38	175,24
Groupe2	575,48	475,84

Et des charges de sinistre attendues :

Espérance de charge globale			
	Femmes	Hommes	Ensemble
Groupe 1	8 495 209	3 504 791	12 000 000
Groupe2	5 754 791	14 245 209	20 000 000
Ensemble	14 250 000	17 750 000	32 000 000