CNAM 2003-2004

Mathématiques actuarielles fondamentales (assurance non vie)

Septième série d'exercices - corrigé

Impact du modèle fréquence coût sur le coefficient de sécurité

On suppose qu'un risque peut être modélisé par un nombre de sinistres N obéissant à la loi :
$P(N=k) = p.(1-p)^k$ avec $0 < p < 1$
Par ailleurs, les montants de sinistres Y ont la densité de probabilité $f(y) = \alpha. \exp(-\alpha y)$ pour $y > 0$, avec $\alpha > 0$.

1) Quels sont l'espérance et la variance de N ?

Pour une variable aléatoire discrète, l'espérance est définie par :

$$E(N) = \sum_{ensemble des k possibles} k P(N=k)$$

$$E(N) = \sum_{k=0}^{\infty} k.p.(1-p)^k = p.\sum_{k=0}^{\infty}(k+1).(1-p)^k - p.\sum_{k=0}^{\infty}.(1-p)^k$$

$$= p.\sum_{k=0}^{\infty} -\frac{\partial}{\partial p}\left[(1-p)^{k+1}\right] - p.\sum_{k=0}^{\infty}.(1-p)^k \quad \text{et comme} \quad \sum_{k=0}^{\infty}.(1-p)^k = \frac{1}{p}$$

$$= p\left[-\frac{\partial}{\partial p}(\frac{1}{p}-1)-\frac{1}{p}\right] = p\left[\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}\right]$$

$E(N) = (1-p)/p$

$$E(N^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2.p.(1-p)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2).p.(1-p)^k - \sum_{k=0}^{\infty} 3k.p.(1-p)^k - \sum_{k=0}^{\infty}.2p(1-p)^k$$

$$= p.\frac{\partial^2}{\partial p}\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^{k+2} - 3.E(N) - 2$$

$$= p.\frac{\partial^2}{\partial p}(1/p-1-(1-p)) - 3.E(N) - 2 = 2/p^2 - 3.(1-p)/p - 2$$

$$V(N) = E(N^2) - E(N)^2 = \frac{1}{p^2}.\left[2-3p+3p^2-2p^2-(1-2p+p^2)\right] = (1-p)/p^2$$

2) Même question pour Y ?

$E(Y) = \int_0^{+\infty} \alpha * x * e^{-\alpha * x} * dx$ = [-x*exp(-α*x)]$_0^{+\infty}$ - $\int_0^{+\infty} -e^{-\alpha * x} * dx$ (intégration par parties)

E(Y) = 0 - [1/α * exp(-α*x)]$_0^{+\infty}$ = **1/α**

V(X) = E(X²) – E(X)²

$E(X^2) = \int_0^{+\infty} \alpha * x^2 * e^{-\alpha * x} * dx$ = [-x²*exp(-α*x)]$_0^{+\infty}$ - $\int_0^{+\infty} -2 * x * e^{-\alpha * x} * dx$ = 2/α * E(X)

D'où : **V(X)** = 2/α² - 1/α² = **1/α²**

E(Y) = 1/α

V(Y) = 1/α²

3) En déduire l'expression de l'espérance mathématique et de la variance de la charge annuelle des sinistres.

A partir de l'espérance et de la variance de la fréquence, et de celles des coût moyens, il suffit d'appliquer la formule pour obtenir l'espérance et la variance de la charge annuelle de sinistres pour un contrat :

E(X) = E(N).E(Y) = (1-p)/(αp)

V(X) = E(N).V(Y) + V(N)E(Y)²
= (1-p)/(pα²) + (1-p)/(p²α²) = (1+p)(1-p)/ (p²α²) = ((1-p²)/(p²α²)

4) Déterminer les valeurs des paramètres pour que E(N) = 0,1 et E(Y) = 9 750. Calculer E(X) et V(X), ou X = charge totale des sinistres.

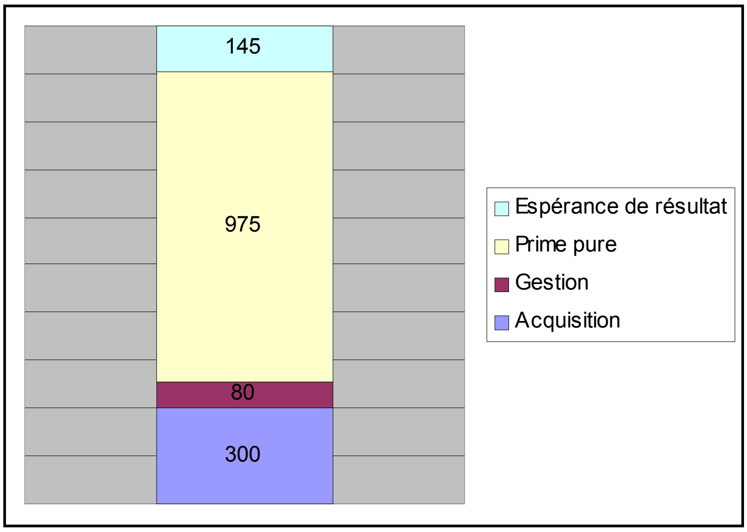
E(N) = (1-p)/p = 0,1 => p = 1/1,1 = 0,90909090
E(Y) = 1/α = 9750 => α ≈ 1,02564 x 10^{-4}

D'où E(X) = 975
V(X) = 19 963 125
σ(X) = 4468

5) On suppose que la catégorie d'assurance regroupe n risques indépendants de ce type, avec une prime commerciale de 1 500. Une commission de 20% est versée à un intermédiaire et le coût annuel de gestion par contrat est de 80.

Quelles conditions doivent être vérifiées par le nombre n de contrats pour que le coefficient de sécurité soit au moins égal à 4, la perte annuelle acceptable K étant égale à 500 000 ?

Pour chaque contrat, la prime commerciale se décompose en :
- une prime pure de 975
- une commission d'acquisition de 20% x 1500 = 300
- 80 sont dépensés en frais de gestion
Le solde, soit 145, représente l'espérance de résultat pour un contrat.



Le coefficient β, pour n contrats s'écrit, pour une perte annuelle acceptable de 500 000

$$\beta = \frac{500000+145.n}{4468\sqrt{n}}$$

On veut obtenir un coefficient b au moins égal à 4 pour afin de rendre le risque de ruine négligeable, soit une inéquation du second degré en $\sqrt{n}$:

$$145\sqrt{n}^2 - 17872\sqrt{n} + 500\,000 \leq 0$$

Déterminant : $17872^2 - 4.145.500\,000 = 29\,410\,000 > 0$ donc deux solutions
$\sqrt{n}$ = 42,927, soit n = 1843
$\sqrt{n}$ = 80,328, soit n = 6452

La probabilité de ruine est très faible pour un nombre de contrats inférieur à 1843 (la richesse initiale disponible compense l'incertitude) ou supérieur à 6452. En cas de perspectives d'activité réelle entre ces deux bornes, il faudrait trouver un moyen de réduire le risque (réassurance, …).