CNAM 2003-2004

Mathématiques actuarielles fondamentales (assurance non vie)

Neuvième série d'exercice (éléments de corrigé)

A - Construction d'une grille tarifaire

Soit une population segmentée selon trois critères : le sexe de l'assuré, son ancienneté en tant que conducteur (novice / expérimenté) et le groupe de véhicule (avec trois groupes possibles).

On cherche à déterminer le tarif à appliquer, en utilisant ces trois critères de tarification, à partir des observations statistiques faites sur une année :

Nombre d'assurés

	Conducteurs novices		Conducteurs expérimentés	
	Femmes	Hommes	Femmes	Hommes
Groupe 1	721	388	3 105	1 331
Groupe 2	184	497	4 187	3 768
Groupe 3	32	130	6 006	11 154

Nombre de sinistres

	Conducteurs novices		Conducteurs expérimentés	
Groupe 1	213	158	900	412
Groupe 2	45	149	1 054	1 072
Groupe 3	10	31	1 324	2 688

Charges estimées des sinistres

	Conducteurs novices		Conducteurs expérimentés	
Groupe 1	926 550	649 380	3 600 000	1 545 000
Groupe 2	185 400	572 160	3 973 580	3 682 320
Groupe 3	37 800	106 175	4 673 720	8 520 960

1 – Pour chaque case tarifaire et chaque sous-population, calculer la fréquence empirique, le coût moyen empirique et la prime pure empirique

2 – En utilisant le modèle multiplicatif pour la fréquence, construire la grille des fréquences théoriques, en écrivant, pour chaque valeur fixée d'un critère, que le nombre de sinistres donné par le modèle appliqué à la population observée est égal au nombre observé.

3 - En utilisant le modèle additif pour le coût moyen, construire la grille des coûts théoriques adaptée aux observations, en écrivant, pour chaque valeur fixée d'un critère que la charge de sinistres donnée par le modèle appliquée aux nombres de sinistres observés est égale à la charge observée.

4 – Quelle grille tarifaire obtient-t-on ? La comparer avec celle du 1.

B - Equilibre d'un système de bonus-malus

Dans un contrat d'assurance automobile applicable à une flotte de 5 véhicules, la clause de bonus-malus est ainsi conçue :

il y a trois niveaux de tarifs
- le niveau 2 est celui-du tarif d'origine (P est la prime annuelle) ;
- le niveau 1 correspond à 50% de P ;
- le niveau 3 correspond à 150% de P.

Les règles applicables sont :
- a chaque année sans sinistre, le niveau descend d'une unité, sans pouvoir être inférieur à 1 ;
- un seul sinistre dans l'année laisse le niveau de tarif inchangé ;
- plus d'un sinistre augmente le niveau de 1 sans pouvoir être supérieur à 3.

1. En considérant que les 5 risques regroupés sont indépendants et que le nombre de sinistres sur chacun d'eux est une variable de Poisson d'espérance mathématique λ = 0,15, quelles sont les probabilités d'avoir en un an un nombre total de sinistres N = 0, ou N = 1, ou N > 1 ?

Les risques étant indépendants, l'ensemble suit une loi de Poisson de paramètre 5λ.

Par ailleurs P(N=0) + P(N=1) + P(N>1) = P(tous les cas possibles) = 1.

$P(N=0) = e^{-5\lambda} = e^{-0,75} = 0,472367 = P_0$
$P(N=1) = 5\lambda\ e^{-5\lambda} = 0,75.e^{-0,75} = 0,354275 = P_1$
$P(N>1) = 1 – P(N=0) – P(N=1) = 1,13358 = P_2$

2. En désignant par a_k, b_k et c_k les probabilités d'être respectivement aux niveaux de tarif 1,2 ou 3 au cours de l'année k, déterminer les valeurs a_{k+1}, b_{k+1} et c_{k+1} en fonction linéaire des valeurs précédentes.

Réécrivons nos règles d'évolution (en première colonne, le niveau au délai k, dans les case le niveau atteint en fonction du nombre de sinistres) :

	Sinistres		
	0	1	> 1
Niveau 1	Niveau 1	Niveau 1	Niveau 2
Niveau 2	Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3
Niveau 3	Niveau 2	Niveau 3	Niveau 3

On est dans la situation « niveau 1 » avec la probabilité ak, dans la situation « niveau 2 » avec la probabilité bk et dans la situation « niveau 3 » avec la probabilité ck.
(et on a : $a_k + b_k + c_k = 1$)
Et reprenons les notations P_0, P_1 et P_2 de la première question :

$a_{k+1} = (P_0+P_1).a_k + P_0.b_k$
$b_{k+1} = P_2.a_k + P_1.b_k + P_0.c_k$
$c_{k+1} = P_2.b_k + (P_1+P_2).c_k$

3. En supposant qu'il existe une distribution limite telle que : a_k converge vers a, b_k converge vers b et c_k converge vers c, déterminer les valeurs de ces proportion et en déduire l'espérance mathématique de la prime ultime en fonction de P. Quelle doit être la valeur de P pour que la prime ultime vaille 100 ?

$a = (P_0+P_1).a + P_0.b$
$b = P_2.a + P_1.b + P_0.c$
$c = P_2.b + (P_1+P_2).c$

ou encore :

$0 = (P_0+P_1 - 1).a + P_0.b = P_0.b - P_2.a \Rightarrow a = b.P_0/P_2$
$0 = P_2.a + (P_1 - 1).b + P_0.c$
$0 = P_2.b + (P_1+ P_2 - 1).c = P_2.b - P_0.c \Rightarrow c = b.P_2/P_0$

Et comme a + b + c = 1
$b.(P_0/P_2 + 1 + P_2/P_0) = 1$

soit $b = (P_0.P_2) / (P_0^2 + P_0P_2 + P_2^2) = 66,59\%$
puis $a = (P_0^2) / (P_0^2 + P_0P_2 + P_2^2) = 24,44\%$
et $c = (P_2^2) / (P_0^2 + P_0P_2 + P_2^2) = 8,97\%$

Ce qui donne une E(prime ultime) = (a x 50% + b + c x 150%) x P = 71,19% x P

Pour que la prime ultime vaille 100 (c'est à dire un tarif équilibré pour la fréquence 0,15) il faut qu'à l'entrée P = 100/ 71,19% = 140,47.

<u>Conclusion :</u> pour que le système soit équilibré à terme, il faut appliquer une surprime de 40,47% aux conducteurs novices (plus précisément aux entrants).

Est ce justifié ? Commercialement soutenable ?

- si on a aucune information => on devrait les tarifer au coût moyen du risque : 100.
- si on a une statistique « conducteurs novices » => on devrait les tarifer en fonction de cette statistique et non en fonction du creusement du bonus.

Enfin, ce système est-il bien adapté aux évolutions de fréquence ?

On appelle « efficacité » le rapport $(\Delta E(P)/P) / (\Delta \lambda / \lambda)$. Idéalement, ce rapport devrait être égal à 1 (i.e. : la prime pure ultime varie en exacte proportion de l'écart entre la fréquence attendue à l'origine, et celle réellement constatée).

Dans cet exemple, imaginons une petite baisse de fréquence ($\lambda = 0,14$ au lieu de 0,15). En réeffectuant les calculs, la prime ultime devient, en proportion de la prime d'origine : 0,6808. $\Delta \lambda / \lambda = 0,01 / 0,15$ tandis que $\Delta E(P)/P = (0,7119 - 0,6808) / 0,7119$ et l'efficacité est 0,66.

Cela signifie que la répercussion tarifaire d'une variation de la fréquence est insuffisante.

En cas de baisse de la fréquence, la prime ultime baisse dans une proportion moindre (ce qui joue dans le sens de la prudence). Inversement, en cas de hausse de fréquence, le tarif ultime devient insuffisant -> pertes techniques.