

Résumé jusqu'aux congés de pâques

- L'assurance non vie est régie par un **contrat** qui définit les obligations des co-contractants, appelés **engagements** pour l'assureur. Ces engagements sont basés sur le principe **indemnitaire**, et non forfaitaire.
- L'assureur, comme tout commerçant, doit tenir une comptabilité patrimoniale qui, outre l'évolution de trésorerie retrace l'évolution des créances et dettes. En assurance les principales dettes, appelées **provisions**, valorisent les engagements de l'assureur envers les assurés et bénéficiaires des garanties. Outre les provisions de sinistres (à payer, tardifs, ...), il convient également de rattacher les encaissements avec les périodes de garanties (passage des **primes émises** aux **primes acquises**).
- La **segmentation des risques en tarification** est essentielle en ce qu'elle permet d'éviter les erreurs de tarification. Elle est également essentielle lorsque l'on s'intéresse aux résultats pour éviter des erreurs d'interprétation pouvant avoir pour conséquences de ne pas effectuer les modifications tarifaires utiles, ou à l'inverse d'en effectuer des inutiles.

Si l'on s'intéresse à un ensemble de risques homogènes (i.e : on évite la problématique de la segmentation) :

- Les probabilités permettent de calculer une **prime pure**, qui est la valorisation de l'**espérance** des risques souscrits.
- Du point de vue de l'assuré, la prime maximum acceptable est **supérieure à la prime pure** (peu s'expliquer, hors le fait que les assurés ... s'assurent, par exemple par la théorie de l'utilité de Von Neumann et Morgenstern).
- Du point de vue de l'assureur, la prime minimum nécessaire est **supérieure** à la prime pure, certes pour compenser ses frais généraux et faire un bénéfice, mais principalement pour **diminuer le risque de ruine**.
- Cette contrainte de solvabilité impose à l'assureur, pour une situation de fortune initiale donnée, des limites sur les risques qu'il peut souscrire : les **pleins de souscription**.
- Outre les éléments influant directement sur le risque de ruine (richesse disponible, espérance de résultat et nombre de contrats), la **réassurance** permet de diminuer le risque de ruine en arbitrant l'espérance du résultat cédé / diminution de l'incertitude.

Pour obtenir un ensemble de risques homogènes, il convient de **segmenter** les risques, ce qui permet d'établir des tarifs a priori.

La théorie s'appuie sur la connaissance a priori de l'espérance et de la variance de la charge de sinistres. En pratique ces informations ne sont pas connues et elles ne peuvent qu'être estimées en observant a posteriori la réalité. La première source d'observation disponible consiste dans l'examen des résultats de l'activité passée de l'assureur. Pour obtenir des observations utilisables, il faut tenir compte de la manière dont les sinistres survenus mais non encore payés sont évalués et réévalués au cours du temps : **la liquidation des provisions de sinistres**.

1. 1er mars 2004 – Introduction – Les 3 aspects de l'opération d'assurance

I.1 Un aspect juridique

Le risque pré-existe à l'opération d'assurance.

Trois grandes catégories de risques peuvent être distingués :

- A, agriculteur court le risque de voir sa récolte détruite par la grêle.
- C, chasseur court le risque de blesser un promeneur
- F, père de famille, court le risque de décéder avant que ses enfants ne soient en âge de gagner leur vie.

En cas de réalisation du risque, A ne pourra pas assumer financièrement, seul, la perte d'une année de revenus ; C le remboursement des frais de soin du promeneur ; et F, la charge de plusieurs années d'éducation, ... de ses enfants.

L'objet de l'opération d'assurance est de transférer ces risques aléatoires.

Ce transfert de risque repose sur un contrat qualifié d'aléatoire par le code civil

- **Article 1964 du code civil** : *Le contrat aléatoire est une convention réciproque dont les effets quant aux avantages et aux pertes, soit pour toutes les parties, soit pour l'une ou plusieurs d'entre elles, dépendent d'un événement incertain. Tels sont :*

le contrat d'assurance,
le prêt à grosse aventure,
le jeu et le pari,
le contrat de rente viagère

Les deux premiers sont régis par les lois maritimes.

Pris individuellement, chacun de ces transferts de risque s'assimile à un pari : en effet, si A, C ou F transférait le risque à son voisin, il ne pourrait être certain de la capacité de celui-ci à tenir son engagement en cas de réalisation du risque (réalisation appelée sinistre).

I.2 Un aspect réglementaire

Néanmoins, lorsque de nombreux risques comparables peuvent être mis en commun les statistiques (théorie des probabilités) nous apprennent que le niveau d'incertitude relative diminue (loi des grands nombre, ...). Ceci a donné naissance à des entités économiques qui se sont spécialisées dans la fourniture de contreparties suffisamment nombreuses pour permettre de mutualiser les risques : les assureurs. Ce terme désigne l'entité qui supporte contractuellement le risque, et non les intermédiaires (agents, courtiers, ...). L'assureur peut re-transférer tout ou partie des risques qu'il a souscrit à un réassureur. Cela ne modifie pas sa relation contractuelle avec les assurés.

L'activité économique d'assurance a été au cours du temps réglementée :

- principe de spécialisation : un assureur ne peut avoir d'autre activité économique que l'assurance (mais rien ne lui interdit de faire partie d'un groupe, ou de détenir une filiale, ayant d'autres activités)
- une sous spécialisation au sein des risques couverts : la survenance d'incendies ou de tempêtes ne doit pas avoir comme effets ne mettre en péril la capacité d'un assureur à tenir des engagements de retraite. Un assureur prenant des engagements

dépendant de la durée de la vie humaine (assurance vie) ne peut prendre en parallèle d'autres engagements d'assurance (qualifiés de non-vie¹).

- pour certains risques (responsabilité civile) le transfert du risque à un assureur peut être obligatoire.²

Enfin, alors que l'assurance dommages et l'assurance de responsabilité sont basées sur un principe indemnitaire (indemnisation des préjudices nés du sinistre), l'assurance vie est basée sur un principe forfaitaire (Le montant des prestations est déterminé à l'avance et non sujet à une évaluation de « préjudices ». « La vie n'a pas de prix »).

I.3 Un aspect comptable

Comme toute entité économique, un assureur est tenu de retracer ses opérations sous forme d'une comptabilité dont l'un des aspects est d'être patrimoniale. Lors de chaque arrêté des comptes, il faut recenser et l'ensemble des actifs et des passifs de l'assureur. La différence constitue la richesse propre de l'assureur (ou capitaux propres propres, ou situation nette). Le tout est représenté sous forme d'un bilan, qui se présente ainsi :

ACTIF	PASSIF
A : valeur de ce que la société possède (immeubles, trésorerie, actions, obligations, ...)	situation nette = A-B
	B : valeur des dettes
<i>Total du bilan</i>	<i>Total du bilan</i>

Lorsque la situation nette est négative, la société est dite insolvable (notion différente de la cessation de paiement qui est une notion de trésorerie : ne pas pouvoir honorer une dette exigible avec la trésorerie disponible).

La variation de la situation nette sur une période (généralement année civile) appelée exercice forme le résultat de l'exercice. Le compte de résultat permet d'expliquer la formation de ce résultat. Il est constitué de compte de charges et de produits.

En comptabilité, il convient de distinguer 2 types d'opérations :

- celles qui ne changent pas la situation nette
 - achat d'un immeuble : l'actif augmente de la valeur de l'immeuble tandis que la trésorerie diminue du même montant -> le total de l'actif est inchangé.
 - achat du même immeuble à crédit : l'actif augmente de la valeur de l'immeuble tandis que le passif augmente du même montant (emprunt) -> la différence actif – passif est inchangée.
- celles qui changent la situation nette

¹ Depuis 1995, il est cependant possible aux assureurs vie, qualifiés alors de mixtes, de couvrir les autres risques touchant la personne : dommages corporels accidentel et maladie.

² Auquel cas, en France, il existe un organisme appelé Bureau Central de Tarification qui peut obliger un assureur à accepter de souscrire un contrat (afin d'éviter le cas de figure où quelqu'un étant obligé de s'assurer ne trouve pas d'assureur). Pour que les tiers n'aient pas à souffrir du défaut d'assurance, ou de la défaillance de l'assureur, des mécanismes de fonds de garantie ont également été mis en place.

- paiement des salaires : l'actif diminue, sans autre contrepartie au bilan -> diminution de la situation nette, qui doit être expliquée par une charge dans le compte de résultat.
- vente d'une action plus cher que son prix d'achat -> augmentation de la situation nette, qui doit être expliquée par un produit au compte de résultat.

Au moment où l'assureur signe un contrat par lequel il accepte un risque, sa situation nette ne change pas (le contrat est supposé à l'origine équilibré). Il a pourtant reçu une prime ou cotisation qui a fait augmenter son actif. Il faut donc qu'il y ait une contrepartie au passif. Quelle est la contrepartie ? Comme en assurance vie, la valorisation des engagements porte le nom de provisions et est inscrite au passif.

L'actuariat, vie ou non vie, consiste dans l'évaluation de ces engagements. Soit pour permettre de déterminer le tarif proposé en échange du transfert de risque (l'actuariat de tarification), puis les engagements étant par nature incertains, l'évolution de la valorisation des engagements au cours de la vie du contrat.

Les provisions en assurance non-vie sont cependant d'une nature différente, et se calculent différemment, de celles de l'assurance vie.

En assurance vie, les règles de tarification et d'évaluation ultérieure des engagements reposent sur l'emploi de règles (tables et taux) quasi systématiquement obligatoires. Les provisions sont appelées provisions mathématiques. En assurance non-vie, il n'y a pas de règles imposées et les provisions sont appelées provisions techniques (bien que leur détermination ou évaluation fasse également appel aux outils mathématiques et statistiques). La seule règle imposée, en France, est que ces provisions soient « suffisantes pour le règlement intégral de leurs engagements vis-à-vis des assurés ou bénéficiaires de contrats » (article R. 331-1 du code des assurances).

Mais quels sont ces engagements ?

I.3.a Les provisions de sinistre

En premier lieu, lors de la réalisation d'un événement garanti (un sinistre), l'assureur doit prendre en charge (dans la limite du contrat) les conséquences de ce sinistre sous forme de prestations. En fin d'exercice, lors de l'établissement du bilan, la partie non encore payée des prestations forme les provisions pour sinistres à payer (PSAP).

Il peut s'écouler un délai plus ou moins long entre la survenance du sinistre et son règlement intégral (plusieurs années par exemple pour un sinistre corporel touchant un enfant, ou il faut parfois attendre la fin de sa croissance pour que toutes les conséquences puissent correctement être appréhendées). L'engagement de l'assureur porte à la fois sur les sommes qu'il devra verser mais également sur l'existence de moyens de gestion des sinistres (service règlement, etc ...) lors des paiements effectifs. Les PSAP comportent donc des provisions de gestion qui valorisent le coût futur de la gestion du sinistre.

Par ailleurs, lors de l'établissement du bilan, il peut y avoir des sinistres déjà survenus et qui n'ont pas été portés à la connaissance de l'assureur (délais de déclaration qui peuvent être longs par exemple en cas de sinistre touchant une résidence secondaire dans laquelle l'assuré

ne se rend que rarement, délais d'acheminement, ...). Pour évaluer les dettes envers les assurés, il faut tenir compte de ces sinistres existant mais inconnus (appelés tardifs). Les provisions pour sinistres doivent donc comporter une provision pour sinistres tardifs, voir dans certain cas (garantie décennale en construction) une provision pour sinistres non encore manifestés (PSNEM).

I.3.b Les provisions de primes

Le cas général en assurance non-vie est celui de la couverture d'un risque pour une période de temps fixée à l'origine (durée de la garantie, le plus souvent un an). Que se passe-t-il lorsque l'on établit un bilan en court de période de garantie ?

Une partie de la période de garantie s'est écoulée, et a donné lieu le cas échéant à la constitution de provisions de sinistres. Pour calculer le résultat de la période il faut rapprocher les sinistres de la période non pas de l'intégralité de la prime encaissée à l'origine mais de la fraction qui était effectivement prévue pour couvrir les sinistres de cette période (appelée prime acquise). Le solde de la prime (prime non acquise) est à conserver pour les futurs sinistres. Cette seconde partie est inscrite au bilan sous l'intitulé Provision pour Primes Non Acquises (PPNA).

⇒ en pratique, la réglementation impose le choix d'une règle de répartition des primes entre partie acquise et non acquise « prorata temporis ».

Exemple

Un risque est souscrit pour une durée de 1 an, le 1^{er} octobre, moyennant une prime de 100. Au 31 décembre de l'année, seul 25% de la période de garantie est écoulée. On fractionne la prime en 2 : 25% est appelée prime acquise, et 75% est la contrepartie de l'engagement de couvrir le risque pendant encore 9 mois. Il faut constituer 75 de PPNA.

Que se passe-t-il si le résultat de l'exercice, obtenu par déduction des primes acquises des sinistres et des frais de gestion est négatif ? C'est probablement la marque d'un tarif insuffisant à l'origine. Il y a tout lieu de penser que ce tarif est également insuffisant dans les mêmes proportions pour le reste de la période de garantie. Le principe de prudence comptable impose de constater immédiatement cette perte future probable et d'enregistrer au passif du bilan « l'engagement de perdre de l'argent en raison d'un tarif insuffisant » en Provisions pour Risques En Cours (PREC). Celle-ci se calcule ainsi : si le ratio (charge des prestations + frais de gestion et d'administration) / (primes acquises) est supérieur à 100%, alors PREC = (excédent de ce ratio par rapport à 100%) x PPNA.

Exemple

La société « S » a été constituée le 31 décembre 2001 avec un capital de 20. Durant l'année 2001, elle a émis des primes pour un montant de 120 (réparties uniformément sur toute l'année). Ses frais d'acquisition sont de 15% des primes émises, et ses frais de gestion annuels de 10% des primes acquises.

Elle a payé des sinistres pour 20.

Au 31/12/2002, elle a évalué ses provisions pour sinistres à payer à 30.

Question 1 :

Compte de résultat et bilan simplifié ?

Compte de résultat

Primes acquises	60
Primes émises	120
Variation des PNA	-60
Charge des prestations	50
Sinistres payés	20
Variation des provisions	30
Frais d'acquisition et d'adm	15
Acquisition	9
Administration	6
Résultat technique	-5

Bilan	N	N-1		N	N-1
Placement			FP	15	20
s	96	20	PPNA	60	
FAR	9	0	SAP	30	
Total	105	20		105	20

-> perte de 5
 perte identique attendue pour l'exercice suivant (tout est linéaire)
 principe de prudence : la constater tout de suite

-> PREC $(50 + 15) / 60 = 108,3\%$
 $(108,3\% - 100\%) \times PPNA = 5$

En première approche, le résultat est une perte de 5. Le tarif était donc insuffisant de 8,3% pour équilibrer le résultat. Or il demeure des risques couverts selon les mêmes bases de tarification (les contrats sont de durée un an). La fraction des primes conservée (sous forme de provision pour primes non acquises) pour faire face à ces risques va très probablement se révéler insuffisante dans les mêmes proportions. Conformément au principe général de prudence en comptabilité, il faut traduire cette perte probable dans les comptes. Ceci se fait en constituant une Provision pour Risques en Cours (PREC)

Compte de résultat corrigé

Primes acquises	55
Primes émises	120
PREC	-5
Variation des PNA et PREC	-60
Charge des prestations	50
Sinistres payés	20
Variation des provisions	30
Frais d'acquisition et d'adm	15
Acquisition	9
Administration	6
Résultat	-10

Bilan	N	N-1		N	N-1
Placement			FP	10	20
s	96	20	Provisions	95	0
FAR	9	0	PPNA	60	
			PREC	5	
			SAP	30	
Total	105	20		105	20

Question 2 :

On suppose que les émissions et les sinistres payés proviennent par part égales de deux activités distinctes (ou de la même activité dans deux pays). Les provisions de sinistres à payer de l'activité 1 sont de 10 et celles de l'activité 2 de 20.

Etablir un compte de résultat séparant les deux catégories.

à fin 2000	Cat 1	Cat 2	Total	Rappel : sans découpage
Primes acquises	30	30	60	60
Primes émises	60	60	120	120
Variation des PNA	-30	-30	-60	-60
Charge des prestations	-20	-30	-50	-50
Sinistres payés	-10	-10	-20	-20
Variation des provisions	-10	-20	-30	-30
variation des PREC	0	-7,5	-7,5	-5
Frais d'acquisition et d'adm	-7,5	-7,5	-15	-15
Acquisition	-4,5	-4,5	-9	-9
Administration	-3	-3	-6	-6
Résultat	2,5	-15	-12,5	-10
PNA	30	30	60	60
SAP	10	20	30	30
PREC		7,5	7,5	5
Provisions totales	40	57,5	97,5	95

-> la catégorie 1 est bénéficiaire

-> la catégorie 2 est très déficitaire

=> il est important d'examiner des risques comparables. A défaut les décisions économiques pourraient être prises sur des bases erronées. Dans l'exemple, augmenter uniformément les tarifs de 8,3% (insuffisance moyenne) aurait probablement pour conséquences de rendre la société non compétitive sur la catégorie 1³, et donc de déséquilibrer la production future au profit de la catégorie 2 pour laquelle la hausse tarifaire ne compense pas l'insuffisance initiale (12,5%).

³ hors situations de monopole sur des garanties obligatoires.

II – L'existence d'un marché de l'assurance – 8 et 15 mars 2004

II.1 La prime pure

L'équation économique de l'assureur est simple : recettes > dépenses.

Les recettes sont constituées des primes et des produits financiers.

Les dépenses sont constituées des prestations (sinistres payés + charge des provisions de sinistre) et des frais.

Comme en assurance vie, on s'intéresse dans un premier temps aux primes pures, soit la fraction de la prime servant à couvrir le risque, abstraction faite des autres éléments (frais de gestion, produits financiers, marge bénéficiaire attendue...).

La notion de prime pure se rattache très directement aux probabilités : elle représente l'espérance des risques souscrits.

cf. document sur les probabilités (et livre Théorie de l'assurance dommages de Pierre Petauton pages 15 à 18).

La prime pure est simple : en dénombrant les cas contractuels de mise en œuvre de la garantie de l'assureur sous forme d'éléments distincts mutuellement exclusifs (E_i). En affectant une probabilité de survenance à chacun de ces événements, et en connaissant le coût, pour l'assureur, en cas de réalisation (C_i) :

$$P = \text{somme}(\text{proba}(E_i) \times \text{Coût}(E_i))$$

Une tarification à la prime pure est dite **équitable** (elle tient compte d'un principe d'équité).

En pratique, les tarifs sont supérieurs à la prime pure.

En première approche, l'assureur a a priori intérêt à accepter un contrat lorsque sa prime commerciale P'' permet de faire face en premier lieu au coût du risque P (prime pure), mais également à ses frais de gestion (éventuellement nets des produits financiers, qui sont relativement faible en assurance non-vie), voire de générer une marge bénéficiaire.

Donc pour lui, une prime commerciale doit respecter, (hors cas particulier de produits financiers anticipés supérieurs aux frais de gestion) a priori la contrainte :

$$P'' \geq P + \text{Frais de gestion}$$

II.2 L'assurance du point de vue des assurés

En supposant que les assurés sont bien informés, ils peuvent effectuer un raisonnement identique, mais en tirer une conclusion opposée : leur intérêt est de souscrire une assurance si $P'' < P$ ou P représente l'espérance de perte à leur charge en cas de non assurance (appelée *auto-assurance* dans le cas des entreprises).

Comment expliquer alors que des assurés souscrivent des garanties non obligatoires ?

L'approche prime pure semble poser une difficulté insurmontable, sauf à considérer les assurés non informés, ou non rationnels.

La théorie de l'utilité de Von Neumann et Morgenstern permet de résoudre cette difficulté.

Elle suppose que les agents économiques attachent une notion d'utilité à leur état de fortune.

Cette fonction (inconnue) est a priori croissante (il est plus utile d'être riche que pauvre), et sa croissance marginale diminue avec la situation de fortune (1 euro de plus a une utilité différente selon qu'il s'agit du premier ou d'un parmi de nombreux autres).

Ces fonctions d'utilité (qui existent selon la théorie) sont donc a priori concaves.

On peut alors ré-examiner la situation de l'assuré non pas sous forme de l'espérance de sa richesse future, mais de l'espérance de l'utilité de cette richesse.

Dans l'exemple suivant on suppose:

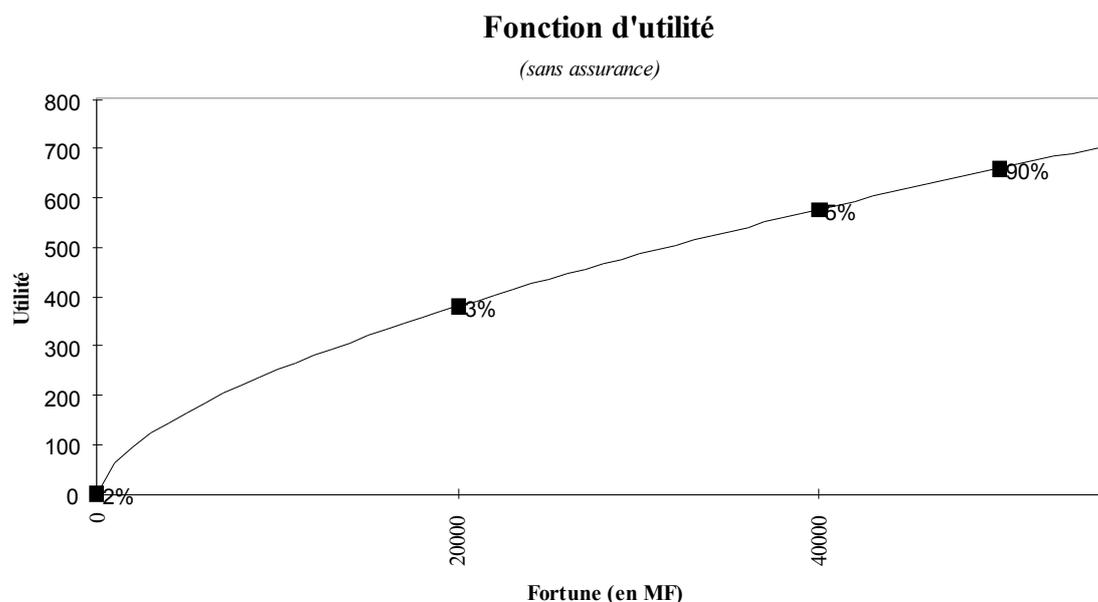
Une fortune initiale $W = 50\ 000$
une fonction d'utilité $U(W) = W^{0,6}$

Cette fonction est croissante, mais la rapidité de cette croissance décroît lorsque W augmente, ce qui caractérise l'aversion au risque.

Le risque est ainsi défini:

- pas de sinistre avec une probabilité de 90%,
- sinistre de 10 000 avec une probabilité de 5%,
- sinistre de 30 000 avec une probabilité de 3%,
- sinistre de 50 000 avec une probabilité de 2%, annihilant complètement la fortune initiale.

La représentation de la fonction d'utilité est la suivante:



L'intervention d'une assurance peut améliorer l'utilité espérée, pourvu qu'elle ne coûte pas trop cher. Dans le tableau suivant on a examiné plusieurs solutions de couverture du risque et calculé les utilités espérées correspondantes.

La meilleur est ici, compte-tenu d'un chargement de 20% des primes, une assurance avec franchise de 10 000.

	Sans assurance	Assurance complète	Assurance pour une part	Assurance avec franchise
Prime	0	2 880	1 440	1 680
Observations		Chargement à	Quote part assurée	Franchise
		20.00%	50.00%	10 000
Utilité	634,05	636,68	635,37	637,97

Recalculons les résultats :

Fortune initiale **50 000**

Sans assurance					Somme
Fortune finale	50 000	40 000	20 000		0
$U = w^{0,6}$	659,75	577,08	380,73		0,00
Proba	90%	5%	3%		2%
$U \times \text{proba}$	593,78	28,85	11,42		0,00
					634,05 E(U(W))

Avec assurance					
Sinistres	0	10 000	30 000	50 000	
Proba	90%	5%	3%	2%	
$S \times \text{Proba}$	0	500	900	1000	2 400 Prime pure
					480 chargements
					2 880 Prime
				U(fortune finale)	
Fortune finale		47 120			636,68

Quote part 50% (-> prime divisée par deux)

Fortune après assurance :		48 560			
Fortune finale	48 560	43 560	33 560	23 560	
U(fortune finale)	648,29	607,37	519,39	420,05	
$U \times \text{proba}$	583,46	30,37	15,58	8,40	637,81

Franchise

sinistre net	0	0	20 000	40 000	
sin net x proba	0	0	600	800	1 400 prime pure
					280 chargements
					1 680 prime
Fortune après assurance		48 320			
Fortune finale	48 320	38 320	38 320	38 320	
U(Fortune finale)	646,36	562,41	562,41	562,41	
$U \times \text{proba}$	581,73	28,12	16,87	11,25	637,97

II.3 L'assurance du point de vue de l'assureur

La théorie de l'utilité permettant d'expliquer l'existence d'une demande à des prix supérieurs à la prime pure, intéressons nous à l'offre.

L'assureur présente une particularité par rapport à l'assuré : il traite avec un grand nombre d'assurés (mutualisation des risques). Avec les primes payées par tous les assurés, il paie les sinistres des malchanceux. Cette caractéristique permet, moyennant deux hypothèses, d'appliquer le théorème de la limite centrale, ou central-limite (*cf. thème « Eléments de proba et stat », pages 20 et 21*).

Hypothèse 1 : Risques identiques et indépendants (ou « homogènes » et « peu dépendants ») et en nombre suffisants

Classiquement, les n risques assurés sont supposés identiques et indépendants : les variables aléatoires X_i , ont donc la même loi et sont indépendantes deux à deux.

Cette hypothèse peut-être affaiblie. En particulier, il n'est pas indispensable que les risques soient strictement identiques et indépendants : il suffit qu'ils soient « homogènes » et « peu dépendants », la loi des grands nombres et le théorème central limite pouvant être généralisés à des variables aléatoires non rigoureusement identiques ni rigoureusement indépendantes.

Dans tous les cas il faut veiller à ce que le nombre de risque soit suffisamment grand pour que l'approximation normale soit valable.⁴

Ces conditions sont tous à fait respectées en « assurance de masse » (Multi-risques habitation, Automobile).

Hypothèse 2 : tarif « exact »

L'assureur est supposé connaître ex ante l'espérance $E(X)$ de la charge aléatoire de prestations X_i relative au risque i . Il fait donc payer pour chaque risque une prime pure P_i correspondant exactement à cette espérance $E(X_i)$.

$E(X_i) = P_i$, montant connu

Le résultat de l'assureur

Se plaçant au début de la période d'assurance, l'assureur doit, pour les n risques prévoir la charge totale des prestations $\sum X_i$, ou ce qui revient au même prévoir la charge moyenne M . Une fois cette prévision effectuée, l'assureur doit chercher comment rendre « pratiquement impossible » l'éventualité d'une perte, ou du moins l'éventualité de sa ruine.

⁴ On rappelle qu'une loi Binomiale $B(n,q)$ peut être approximée par :

- une loi normale si $n \cdot q > 30$;
- - une loi de Poisson si $n \cdot q < 10$;

L'assureur a principalement comme produits, les primes⁵ versées par les assurés (P'' , toutes identiques dans l'hypothèse de risques identiques) ainsi que les produits financiers correspondants au placement des primes (PF) et comme charges, les prestations éventuellement versées aux assurés $\text{Somme}(X_i)$ ainsi que les frais de gestion FG.

Son résultat R est donc $R = \text{Somme}(P'') - \text{Somme}(X_i) - (FG - PF)$

Remarque : Frais de gestion nets : on néglige généralement les produits financiers, ce qui revient à faire l'hypothèse que les chargements + produits financiers correspondent globalement aux frais de gestion. Hypothèse raisonnable devant l'aléa résultat de la sinistralité et dans la mesure où l'assureur peut intervenir pour contenir ses frais nets dans l'enveloppe des chargements alors qu'il lui est difficile de limiter les sinistres de ses assurés.

Les primes commerciales doivent servir à financer les sinistres, les frais et le bénéfice de l'assureur.

L'usage actuariel traduit cette préoccupation en décomposant chaque prime commerciale P'' en trois parties :

Prime pure $P = E(X)$

(avec l'ensemble des primes pures, l'assureur espère faire face à la charge des prestations) ;

Un chargement de gestion proportionnel à la prime commerciale gP''

(avec l'ensemble des chargements de gestion l'assureur espère faire face à l'ensemble des frais de gestion, ces frais étant diminués des produits des placements)

Un chargement de sécurité proportionnel à la prime pure ρP .

Avec l'ensemble des chargements de sécurité, l'assureur espère faire face à un écart éventuel entre la charge réelle et la charge probable et donc dégager un bénéfice.

$$P'' = P + gP'' + \rho P$$

Les chargements de gestion étant sensés compenser les frais de gestion, le résultat de l'assureur se réécrit :

$$R = \text{somme}(1+\rho)P - \text{somme}(X_i)$$

$$R = n.(1+\rho)P - \text{somme}(X_i)$$

Par construction, $P = E(X_i)$ d'où $E(R) = n.\rho.P$

Néanmoins, la charge des sinistres $\text{Somme}(X_i)$ est une variable aléatoire.

Sous l'hypothèse 1 elle a pour espérance $nE(X)$ et pour variance $n V(X)$.

Selon le théorème central limite :

$$(\text{Somme}(X_i) - n \cdot E(X)) / (\sqrt{n} \cdot \sigma(X)) \rightarrow N(0;1)$$

⁵ Si l'on veut faire le lien avec la comptabilité, il est important de raisonner en primes acquises à l'exercice. Pour simplifier on considère que tous les contrats ont une durée d'un an et ont été souscrits au premier janvier de l'année.

III Risque de perte, risque de ruine et coefficient de sécurité

Le résultat R étant une variable aléatoire, l'assureur est exposé à un risque de perte. S'il dispose d'un capital initial K , il souhaite éviter, sinon le risque de perte, du moins le risque de ruine.

La probabilité de non ruine après un an s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{Proba}(\text{non ruine après un an}) &= P(R > -K) \\ &= \text{Proba}(nP + n\rho P - \sum X_i > -K) \text{ ou } P \text{ représente la prime pure, } \rho \text{ le taux de chargement de} \\ &\text{sécurité et } X_i \text{ les sinistres individuels} \\ &= \text{Proba}(\sum X_i - nP < K + n\rho P) \\ &= \text{Proba}((\sum X_i - nP)/\sigma_{\sum X_i} < (K + n\rho P)/\sigma_{\sum X_i}) \text{ et ici } \sigma_{\sum X_i} = \sqrt{n} \cdot \sigma_X = \text{car les risques sont} \\ &\text{indépendants.} \\ &= \text{Proba}(\text{réalisation d'une loi normale}(0,1) < (K + n\rho P)/\sigma_{\sum X_i}) \end{aligned}$$

Le terme de gauche est appelé coefficient de sécurité et est noté β .

$\beta = (K + n\rho P)/\sigma_{\sum X_i}$

ou encore :

$\beta = (\text{Richesse disponible} + \text{espérance de résultat}) / \text{écart type du résultat}$

d'où :

$\text{Proba}(\text{non ruine après un an}) = \Pi(\beta)$ ou Π est la fonction de répartition de la loi de Gauss (ou loi normale).

La loi normale étant tabulée, $\Pi(\beta)$ est connu.

Remarque : sous Excel, $\Pi(\beta)$ correspond à la fonction *loi.normale.standard*(β)

Remarque : Dans les éléments nécessaires pour évaluer la probabilité de ruine, l'élément le plus difficile à évaluer est l'écart type du résultat attendu.

Exemples :

$\Pi(2) = 97,725\%$ soit une probabilité de ruine de 2,275%

$\Pi(3) = 98,850\%$ soit une probabilité de ruine de 0,135%

$\Pi(4) = 99,9968\%$ soit une probabilité de ruine de 0,0032%

Conséquences du risque de ruine sur l'activité

La dispersion des risques

Plaçons nous dans le cas d'une assurance à valeur déclarée dans laquelle la charge de sinistre X est proportionnelle à un capital assuré C .

On écrira $X = Z.C$ et dès lors $P = E(X) = \pi C$ et $\text{var}(X) = s^2 C^2$.

Considérons un ensemble de n contrats de ce type, pour lesquels le capital assuré C est le même et supposons que le taux de chargement de sécurité ρ soit indépendant du capital.

Le coefficient de sécurité s s'écrit :

Le chiffre d'affaires est proportionnel à la somme des capitaux assurés : $\Sigma = nC$

$$\beta = (K + \rho n \pi C) / (\sqrt{n} s C) = \sqrt{n} (K + \rho \pi \Sigma) / (s \Sigma)$$

ON voit ainsi que le coefficient de sécurité croît avec n , pour une valeur de Σ donnée. IL y a intérêt, du point de vue de la sécurité à garantir beaucoup de petits contrats : c'est la **dispersion des risques**.

Les pleins de souscription

Un assureur gère une catégorie de risques pour lesquels le coefficient de sécurité s s'écrit

$\beta = N/T$, où T^2 est la variance du risque total. On suppose que β a un niveau initial satisfaisant (par exemple > 4).

Envisageant de garantir une assurance à valeur déclarée de capital C , l'assureur calcule le coefficient $\beta(C)$ obtenu après adjonction du nouveau contrat.

$$\beta(C) = (N + \rho \pi C) / \text{racine}(T^2 + s^2 C^2)$$

L'étude de cette fonction montre qu'elle passe par un maximum, puis décroît et devient inférieure à 4 au de là d'un capital appelé **le plein**.

IV - La réassurance

IV. 1. Intérêt de la réassurance – définitions

On a examiné auparavant le risque de ruine de l'assureur. L'assureur peut diminuer ce risque en :

- augmentant le chargement de sécurité (par augmentation de la prime commerciale, ou par diminution de ses frais généraux à prime constante) ;
- augmentant ses fonds propres
- augmentant le nombre de ses assurés.

Cependant, de nombreuses situations de marché ne lui permettent pas d'exercer son activité avec une sécurité suffisante.

En particulier, selon les activités, l'assureur va chercher à se prémunir contre :

- le sinistre de montant « exceptionnellement » élevé (en distinguant les cas où le montant maximum est connu ou inconnu) ;
- l'écart entre le résultat possible et le résultat attendu (mutualisation insuffisante ou insuffisance de fonds propres) ;
- le risque de « conflagration ».

Ainsi les sociétés bâtissent-elles, en fonction des caractéristiques propres à leur activité (début d'activité, branches pratiquées, ...), leur **programme de réassurance**. Celui-ci consiste en la combinaison de plusieurs **traités** de réassurance de différentes sortes et de **facultatives** (accords de réassurance pour certaines affaires hors norme nécessitant une couverture spéciale en réassurance).

L'assureur, ou entreprise **cédante**, se réassure donc auprès d'une ou plusieurs entreprises **cessionnaires**, ou réassureurs. Eux-mêmes peuvent **retrocéder** une partie des risques qu'ils ont pris en charge à d'autres réassureurs, qualifiés alors de **retrocessionnaires**. Vis-à-vis de l'assuré, seul l'assureur demeure responsable de la garantie qu'il délivre.

Les relations entre assureur et réassureur ne sont pas tout à fait du même type que celles qui lient l'assureur et l'assuré. Si le réassureur a un droit de contrôle sur les opérations de l'assureur, l'opération de réassurance est fondée sur la bonne foi des parties et implique généralement un partenariat durable dans le temps. L'idée qui dirige les relations de réassurance est celle de **partage de sort** de la cédante par le réassureur.

IV.2 - Les différentes formes de traités de réassurance

On distingue classiquement les traités de réassurance dits **proportionnels**, des traités **non proportionnels**.

Les traités proportionnels sont :

- les traités en **quote-part** ;
- les traités en **excédent de plein**.

Les traités non-proportionnels sont :

- les traités en **excédent de sinistres**
- les traités en **excédent de pertes**

1 – La quote-part

Dans ce traité très simple, l'assureur cède une fraction uniforme et constante de ses primes et de ses sinistres.

2 – L'excédent de plein (ou excédent de capitaux, ou excédent de risque)

La fraction (de prime et de sinistres) est déterminée risque par risque. le traité définit un **plein de conservation** et un **plein de souscription** (la différence entre les deux est appelée **capacité** du traité). Il ne s'applique qu'à des risques à **capitaux garantis** inférieurs au plein de souscription. Le taux de conservation, défini police par police, est le rapport entre capital

garanti et le plein de conservation (si le capital garanti est inférieur au plein de conservation, le risque est entièrement conservé par la cédante).

3 – L'excédent de sinistres (ou excess of loss)

L'excédent de sinistres est défini par une **priorité** (ou **franchise**) et un **plafond**. Le réassureur prend en charge la partie de tout sinistre qui excède la priorité du traité et dans la limite de la **portée** du traité (différence entre le plafond et la franchise).

Généralement, les plans de réassurance sont composés d'un empilement de plusieurs traités en excédent de sinistres fonctionnant comme ci-dessus : ils comportent plusieurs **tranches** et la dernière peut être **illimitée**.

Le traité en excédent de sinistres existe sous deux formes : le traité en excédent de sinistres **par risque** et le traité en excédent de sinistre **par événement**.

4 – L'excédent de perte annuelle (aggregate loss et stop-loss)

Le traité en excédent de pertes annuelles prévoit l'intervention du réassureur lorsque la charge annuelle globale de sinistres (sur une branche donnée) dépasse un seuil déterminé : ce seuil est défini comme un montant (**aggregate loss**) ou comme un niveau de S/P (**stop-loss**). Ces traités ont également une portée limitée (S/P « maximum »).

IV.3 – L'équilibrage des traités de réassurance

L'équilibrage des traités de réassurance est fortement tributaire des clauses de commissionnement ou de participation aux bénéfices qui y figurent.

1 - La commission de réassurance

Exprimée en pourcentage des primes cédées, c'est la commission que le réassureur verse à l'assureur qui lui a apporté des affaires. En effet, dans un traité de réassurance proportionnelle, l'assureur apporte une fraction des primes **commerciales** contre une prise en charge par le cessionnaire d'une même fraction des sinistres. Or les primes commerciales comportent des chargements pour frais généraux que l'assureur continue à supporter : il paraît donc justifié que le réassureur le rémunère pour le travail de gestion qui reste à sa charge.

La négociation de la commission de réassurance définit bien souvent l'équilibre du traité de réassurance et reflète les rapports existants entre les deux parties (ex. : réassurance de **soutien**).

Le taux de commission de réassurance est généralement fixe. Il peut être variable, en fonction de la sinistralité constatée.

2 - Les clauses de participations aux bénéfices et les clauses de reconstitution de garantie

Afin de responsabiliser l'assureur, le réassureur peut prévoir des clauses de participation aux bénéfices. Celles-ci prévoient généralement des **reports de pertes** d'une année sur l'autre (sur plusieurs années) afin que les bénéfices du réassureur viennent en priorité combler ses pertes passées.

Certains traités de réassurance prévoient également des clauses de **participation aux pertes** (lorsque la situation de leur cédante est un peu dégradée).

Enfin, les traités en excédent de sinistres prévoient généralement en cas de survenance d'un nombre déterminé de sinistres importants, des clauses de **reconstitution** de garantie : l'assureur doit verser une surprime ou prime de reconstitution pour continuer de bénéficier de la garantie qui a déjà joué à leur profit.

IV.4 – L'effet sur les comptes de l'assureur

On a vu que si l'on s'intéresse au résultat annuel, un indicateur fondamental est le coefficient de sécurité :

$$\beta = (K + \rho U) / T = (\text{Fonds propres} + E(\text{résultat annuel})) / \sigma_{\text{résultat annuel}}$$

La réassurance va diminuer ρU , l'espérance mathématique du résultat d'exploitation annuel car un bénéfice est normalement transféré au réassureur, mais elle devrait diminuer suffisamment T pour que β se trouve augmenté.

Toute la difficulté est là, du point de vue de l'assureur : rechercher les modalités qui minimisent T , pour une espérance mathématique de résultat cédé déterminé, ou inversement les modalités qui minimisent l'espérance de résultat cédé, pour obtenir une réduction de variance donnée.

V - La tarification (29 mars et 5 avril)

On a supposé jusqu'à maintenant que l'on connaissait ex ante le résultat probable des opérations.

Exemple

Le chiffre d'affaires « réparation des bris de glace » a été de 1,25 Meuros pour un village comportant 1000 familles ayant toutes un véhicule, dont aucun n'est pour l'instant assuré. L'assureur A propose une garantie bris de glaces tarifée 1250 euros.

Il s'attend a priori à équilibrer son activité : recettes = 1000 x 1250 euros = 1,25 Meuros = dépenses.

En réalité, la moitié des assurés n'a pas de garage, et déclarent 4 fois plus de sinistres que les autres.

	<i>Avec garage</i>	<i>Sans garage</i>	<i>Ensemble</i>
<i>Nombre d'assurés</i>	500	500	1 000
<i>Coût</i>	250 000	1 000 000	1 250 000
<i>Coût par assuré</i>	500	2 000	1 250
<i>Prime</i>	1 250	1 250	1 250
<i>Résultat pour un assuré</i>	- 750	+750	0

*Les assurés avec garage n'auront pas d'intérêt à s'assurer, au contraire de ceux sans garage. L'assureur « A » subit une **antisélection par dissymétrie d'information**.*

Résultat probable : 500 x 1 250 – 1 000 000 = -250 000.

L'année suivante, l'assureur A différencie ses tarifs sur le critère Garage et s'attend à atteindre l'équilibre.

Un assureur B constatant que les véhicules sans garage ont certes 4 x plus de sinistres en moyenne, mais sont également des véhicules de gamme inférieure pour lesquelles le coût des réparations est moins élevé. Il propose une garantie tarifée ainsi :

	<i>Avec garage</i>	<i>Sans garage</i>	<i>Ensemble</i>
<i>Nombre d'assurés</i>	500	500	1 000
<i>Fréquence</i>	0,5	2	1,25
<i>Coût par sinistre</i>	1 800	800	1 000
<i>Coût par assuré</i>	900	1 600	1 250
<i>Prime « B »</i>	900	1 600	
<i>Prime « A »</i>	500	2 000	

*Les assurés sans garage vont s'assurer auprès de « B » et ceux avec garage auprès de « A » qui subit un phénomène **d'antisélection**.*

Le résultat probable de « A » va être : 500 x 500 – 500 x 900 = -200 000.

En assurance non-vie, il est important d'avoir une bonne connaissance des risques individuels, c'est à dire une segmentation technique fine même si la segmentation commerciale finalement utilisée est plus simple.

Les critères sont nombreux : liés au type de garantie, à l'assuré, à la zone économique, ...

Elle permet de constituer des ensembles de risques assez homogènes pour faire l'objet d'analyses statistiques.

V.1 La segmentation des risques (29 mars 2004)

Présentation de la problématique

Une population assurable regroupe dans la pratique des sous-populations présentant des risques hétérogènes : on ne peut donc pas modéliser le risque par une loi unique (ou considérer que les risques sont IID), mais par une multiplicité de lois, valables chacune pour une sous-population.

La question se pose donc de savoir comment segmenter la population assurable : quels critères de tarification retenir, et comment construire la grille tarifaire résultant de ce découpage, sachant que :

- présenter un seul tarif à tous les assurés induit des risques d'antisélection⁶, qui justifient la nécessité d'une segmentation la plus fine possible de la population assurable.
- plus le découpage est fin, moins les observations effectuées pour chacune des cases de la grille sont statistiquement significatives.

La construction d'une grille de tarification nécessite de définir des classes de risques suffisamment homogènes.

Pour cela, on dispose de deux types de variables (appelées critères de tarification) :

- **les variables exogènes**, qui apportent des informations relatives au risque (âge ou sexe de l'assuré, activité professionnelle, catégorie de véhicule, zone géographique du risque, ...)
- **des variables endogènes**, qui apportent des informations sur les réalisations individuelles passées du risque.

La prise en compte des seules premières variables conduit à une **tarification a priori**. La prise en compte des variables endogènes conduit à une **tarification a posteriori** sera présentée après les congés de pâques.

⁶ soit par dissymétrie d'information entre l'assureur et l'assuré, ce dernier ayant, hors cas des assurances obligatoires, l'option de ne pas s'assurer s'il considère le tarif qui lui est appliqué trop élevé, soit du fait de la diversité des segmentations tarifaires appliquées par les assureurs qui conduit, pour un même risque, à des prix proposés différents.

Pour la tarification à priori, dès lors que l'on retient plusieurs critères de tarification possédant chacun plusieurs valeurs (ou modalités) possibles, il est impossible de façon pratique d'estimer séparément les primes pures de chaque sous-population obtenue par le croisement des différents critères

Par exemple, en assurance automobile, s'il y a 10 zones géographiques, 5 classes de véhicules et 2 niveaux d'expérience du conducteurs, il y a : $10 * 5 * 2 = 100$ tarifs à estimer. Certaines cases tarifaires n'auront que très peu d'effectifs, donc les primes pures obtenues à partir d'observations empiriques ne seront pas significatives.

Pour contourner cette difficulté, la technique usuelle consiste à chercher à **modéliser l'influence de chaque critère de tarification, pris isolément.**

Cette influence se traduit par un paramètre : il y aura autant de paramètres que de valeurs possibles des différents critères, soit dans notre exemple : $10 + 5 + 2 = 17$.

La prime pure de chaque case tarifaire s'exprimera en fonction de ces paramètres : ainsi, de façon générale, pour calculer $(N_1 * N_2 * N_3 * \dots * N_k)$ primes pures, il suffira de déterminer $(N_1 + N_2 + N_3 \dots + N_k)$ paramètres.

Pour que l'influence de chacun des paramètres soit correctement estimée, il faut en pratique faire attention au problème de **corrélation entre variables exogènes** au sein de la population observée.

Les deux modélisations les plus simples et les plus intuitives sont :

- **le modèle additif** : lorsque tel critère prend telle valeur, la prime pure est rehaussée (ou abaissée) de x euros.
- **le modèle multiplicatif** : lorsque tel critère prend telle valeur, la prime pure est rehaussée (ou abaissée) de x%.

Exemple de cas pratique : construction d'une grille tarifaire à deux critères.

Soit une population segmentée selon deux critères : le sexe de l'assuré et le groupe de véhicules, avec trois groupes possibles. On cherche à déterminer le tarif à appliquer en utilisant ces deux critères de tarification, à partir des observations statistiques faites sur une année :

Les **nombre d'assurés** sont les suivants :

	Femmes	Hommes
Groupe 1	400	100
Groupe 2	250	250
Groupe 3	100	400

Les **charges estimées des sinistres** survenus sont les suivantes :

	Femmes	Hommes
Groupe 1	121 407	42 056
Groupe 2	60 970	84 019
Groupe 3	0	114 884

Première approche : calculer, case par case la prime pure (rapport de la charge des sinistres sur le nombre d'assurés observés). On obtient :

Nombre d'assurés

	Femmes	Hommes	Ensemble
Groupe 1	400	100	500
Groupe 2	250	250	500
Groupe 3	100	400	500
Ensemble	750	750	1 500

Prime pure empiriques

	Femmes	Hommes	Ensemble
Groupe 1	304	421	327
Groupe 2	244	336	290
Groupe 3	0	287	230
Ensemble	243	321	282

Charges estimées des sinistres

	Femmes	Hommes	Ensemble
Groupe 1	121 407	42 056	163 463
Groupe 2	60 970	84 019	144 989
Groupe 3	0	114 884	114 884
Ensemble	182 377	240 959	423 336

Cette méthode n'est pas satisfaisante, car les nombres d'observation de certaines cases sont insuffisants pour que les observations empiriques soient significatives (Par exemple, quel assureur couvrirait les femmes du groupe 3 en échange d'une prime nulle ?).

Deuxième approche (non satisfaisante) : tarification à critères fixés

Pour accroître le nombre de données, et réduire l'incidence des aléas statistiques, on effectue des « coupes transversales », en calculant les primes pures empiriques pour chaque valeur fixée de chaque critère.

Par rapport à la prime pure globale (282 euros), on obtient les écarts relatifs et absolus suivants.

Écarts relatifs et absolus par rapport à la prime pure d'ensemble

	Ecart relatif	Ecart absolu
Groupe 1	15,84%	45
Groupe 2	2,75%	8
Groupe 3	-18,59%	-52
Femmes	-13,84%	-39
Hommes	13,84%	39

On en déduit les grilles tarifaires suivantes :

Grille fondée sur les écarts relatifs

	Femmes	Hommes
Groupe 1	282	372
Groupe 2	250	330
Groupe 3	198	262

Grille fondée sur les écarts absolus

	Femmes	Hommes
Groupe 1	288	366
Groupe 2	251	329
Groupe 3	191	269

Ces grilles tarifaires ne sont **pas cohérentes** avec les observations empiriques (la surprime masculine est insuffisante) :

- la prime pure demandée aux hommes est supérieure dans le premier cas de 32% ($321 / 243 - 1 = 32\%$) à celle des femmes, alors que, case par case, elle est supérieure de 39% (groupe 1), 38% (groupe 2) et +l'infini (groupe 3).
- dans le second cas, la prime pure demandée aux hommes est supérieure de 78 euros ($321 - 243$), alors que, case par case, les écarts sont de 117 (groupe 1), 92 (groupe 2) et 287 (groupe 3)

Cette incohérence provient de la **corrélation** entre les variables : les femmes forment une part prépondérante (80%) des conductrices de véhicules du groupe 1, alors que les hommes sont majoritaires (80%) pour le groupe 3.

De ce fait, lorsque l'on observe la sous-population féminine, la charge moyenne par assuré obtenue **ne reflète pas seulement ses caractéristiques propres, mais également celles propres aux véhicules du groupe 1.**

Les véhicules du groupe 1 ayant une prime pure plus élevée que les véhicules des autres groupes, cette sur-représentation des véhicules au sein de la population féminine **réduit la sous-sinistralité apparente des femmes par rapport aux hommes.**

Cette approche n'est donc pas non plus satisfaisante.

Troisième approche : le modèle additif

Pour éliminer les corrélations entre variables, on définit une relation mathématique entre la prime pure et les valeurs prises par les critères de tarification.

Pour K critères, prenant chacun n_k valeurs possibles, on a $N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ inconnues à déterminer.

Comme il y a $N = n_1 * n_2 * \dots * n_k$ cases tarifaires, il est a priori impossible de trouver un modèle respectant les primes pures observées pour chaque case de la grille tarifaire.

Une méthode possible (dite **méthode itérative des marges**) consiste à fixer la valeur d'un critère, et à écrire que la prime pure empirique observée pour la sous population possédant cette valeur est égale à la prime pure moyenne découlant du modèle additif, appliqué à la population observée.

Cela s'écrit, pour les primes pures de la population féminine (en notant a_1 : influence femmes, a_2 : influence homme, b_1 : influence groupe 1, b_2 : influence groupe 2 et b_3 : influence groupe 3).

Prime pure paramétrée (en écarts absolus par rapport à la prime pure de l'ensemble de la population) :

	Femmes	Hommes
Groupe 1	$a_1 + b_1$	$a_2 + b_1$
Groupe 2	$a_1 + b_2$	$a_2 + b_2$
Groupe 3	$a_1 + b_3$	$a_2 + b_3$

Ecrivons nos contraintes :

(i) charge totale « groupe 1 » = somme des primes pures x nombres d'individus concernés:

$$163\,463 = 400 \times (282 + a_1 + b_1) + 100 \times (282 + a_2 + b_1)$$

(ii) charge totale « groupe 2 » :

$$144\,989 = 250 \times (282 + a_1 + b_2) + 250 \times (282 + a_2 + b_2)$$

(iii) charge totale « groupe 3 » :

$$114\,884 = 100 \times (282 + a_1 + b_1) + 400 \times (282 + a_2 + b_1)$$

(iv) charge totale « femmes » :

$$182\,377 = 400 \times (282 + a_1 + b_1) + 250 \times (282 + a_1 + b_2) + 100 \times (282 + a_1 + b_3)$$

(v) charge totale « hommes » :

$$240\,959 = 400 \times (282 + a_2 + b_1) + 250 \times (282 + a_2 + b_2) + 100 \times (282 + a_2 + b_3)$$

Ce qui se réécrit :

$$(i) 22\,351 = 500 \cdot b_1 + 400 \cdot a_1 + 100 \cdot a_2 \Rightarrow b_1 = (22351 - 400 \cdot a_1 - 100 \cdot a_2) / 500$$

$$(ii) 3\,877 = 500 \cdot b_2 + 250 \cdot a_1 + 250 \cdot a_2 \Rightarrow b_2 = (3877 - 250 \cdot a_1 - 250 \cdot a_2) / 500$$

$$(iii) -26\,228 = 500 \cdot b_3 + 250 \cdot a_1 + 250 \cdot a_2 \Rightarrow b_3 = (-26228 - 100 \cdot a_1 - 400 \cdot a_2) / 500$$

$$(iv) -29291 = 750 \cdot a_1 + 400 \cdot b_1 + 250 \cdot b_2 + 100 \cdot b_3 \Rightarrow a_1 = (-29291 - 400 \cdot b_1 - 250 \cdot b_2 - 100 \cdot b_3) / 750$$

$$(v) 29291 = 750 \cdot a_2 + 100 \cdot b_1 + 250 \cdot b_2 + 400 \cdot b_3 \Rightarrow a_2 = (29291 - 100 \cdot b_1 - 250 \cdot b_2 - 400 \cdot b_3) / 750$$

La **méthode itérative** consiste à partir de valeurs fixées pour une famille de paramètres, par exemple $a_1 = a_2 = 0$ (cas où le critère femme / homme n'aurait aucune influence sur la sinistralité, donc sur la tarification).

D'en déduire b_1 , b_2 et b_3 (ici : 44,70 7,75 et -52,46).

A partir de ces b_1 , b_2 et b_3 de recalculer a_1 et a_2 (ici : -58,49 et 58,49)

Puis, avec ces nouveaux a_1 et a_2 , de recalculer b_1 , b_2 et b_3 , (ici : 79,79 7,75 et 87,55)....

au bout de quelques itérations (7 à 8 dans l'exemple), les valeurs se stabilisent (convergent).

Ici : $a_1 = -76,96$ $a_2 = 76,96$, $b_1 = 90,88$, $b_2 = 7,75$ et $b_3 = -98,63$.

Ce qui donne la grille des primes pures :

	Femmes	Hommes
Groupe 1	296	450
Groupe 2	213	367
Groupe 3	107	261

Celle-ci peut se résumer de la façon suivante :

La prime de base pour une femme conduisant un véhicule du groupe 1 est de 296.

Les autres cases s'en déduisent :

- en ajoutant 153,91 si l'assuré est un homme,
- en retranchant 83,12 si le véhicule assuré fait partie du groupe 2
- en retranchant 189,50 si le véhicule assuré fait partie du groupe 3.

Cette grille correspond à des charges de sinistres attendues, qui respectent nos contraintes de totaux marginaux :

	Femmes	Hommes	Ensemble
Groupe 1	118 458	45 005	163 463
Groupe 2	53 256	91 733	144 989
Groupe 3	10 664	104 220	114 884
Ensemble	182 377	240 959	423 336

Quatrième approche : le modèle multiplicatif

Il est identique dans son principe au modèle additif (d'autant que le passage de l'un à l'autre correspond à estimer des log de paramètres au lieu de paramètres, ou inversement des exponentielle de paramètres au lieu de paramètres).

La seule différence provient de l'écriture du modèle avec des multiplications (.) au lieu d'additions (+) et d'un démarrage, en cas de résolution itérative, avec des valeurs initiales à 1.

Dans notre exemple, on écrit :

Prime pure paramétrée (coût moyen paramétré en écart relatif par rapport à la prime pure de l'ensemble de la population) :

	Femmes	Hommes
Groupe 1	$x_{1.y1}$	$x_{2.y1}$
Groupe 2	$x_{1.y2}$	$x_{2.y2}$
Groupe 3	$x_{1.y3}$	$x_{2.y3}$

Puis on écrit nos contraintes de charges totales :

Pour le groupe 1 :

$$163\,463 = 400.282.x_{1.y1} + 100.282.x_{2.y1}$$

ce qui se réécrit : $y_1 = 163\,463 / (400.282.x_1 + 100.282.x_2) = (163\,463 / 282).(400.x_1 + 100.x_2)$
 etc ...

Et on démarre l'approche itérative en fixant certains paramètres (par exemple $x_1 = x_2 = 1$, ce qui correspond au cas absence d'influence du critère femme/homme).

Et on itère jusqu'à ce que les résultats obtenus soient stables.

V.2 La liquidation des provisions

On a vu lors l'importance d'une segmentation fine pour éviter les effets de l'antisélection, qu'elle soit interne (par dissymétrie d'information : l'assuré bénéficiant d'une meilleure connaissance de son risque que l'assureur peut choisir, si estime ce risque trop faible par rapport à la prime demandée, de ne pas s'assurer), ou externe (due à la concurrence entre assureurs, et plus précisément à la diversité des segmentations tarifaires pratiquées).

On a vu également l'importance du découpage de l'activité en ensemble homogène lors de l'appréciation des résultats (exemple de constitution d'une Provision pour risques en cours différente selon le niveau de détail des résultats).

On s'est placé jusqu'ici dans la situation la charge totale de sinistres pouvait être représentée par une variable aléatoire d'espérance et de variance connues a priori, tant du point de vue de l'assureur que de celui du réassureur.

En pratique, les caractéristiques des risques ne sont pas entièrement connues a priori. On peut néanmoins essayer de les estimer, à partir de l'observation du passé.

Parmi les sources d'information sur le passé, la plus fiable est a priori l'information collectée par l'assureur sur son propre portefeuille.

V.2.a Le rattachement des charges à l'exercice de survenance

Les paiements effectués une année donnée (année n) sont relatifs à des sinistres qui peuvent avoir été déclarés dans l'année mais aussi à des sinistres plus anciens. De même les provisions de la fin de l'année comprendront les estimations des sommes restant à payer pour des sinistres survenus dans l'année mais également celles des années précédentes.

L'année d'après (n+1), les paiements et les provisions de clôture intégreront les sinistres survenus dans l'année n+1 : la comparaison des grandeurs comptables "agrégées" – paiements ou provisions – ne nous permet donc pas de porter un jugement sur l'estimation qui avait été faite des provisions à la fin de l'année n.

Par exemple, imaginons une activité de type responsabilité civile, ou un seul sinistre ancien fait l'objet d'un contentieux devant un Tribunal. La probabilité d'être condamnée à payer 10 M€ est de 50%, et la probabilité de ne rien devoir payer de 50%. L'espérance de cette charge est de 5 M€, montant forcément faux de 5 M€.

Si elle constitue une provision de 5M€ elle va, lors du jugement, soit constater un bénéfice comptable de 5 M€, soit enregistrer une perte de 5 M€. Dans tous les cas, ce bénéfice ou cette

perte ne doivent pas être considérés comme lié à l'équilibre de l'activité courante. A défaut, les décisions tarifaires prises seraient faussées.

C'est pourquoi il est nécessaire de rattacher les paiements et les provisions de sinistres aux années de survenance des sinistres concernés.

Ainsi, la liquidation de la charge de sinistre d'une année n de survenance donnée pourra être suivie dans le temps.

Par exemple, la charge de l'année de survenance n peut être suivi avec un tableau de ce type :

<i>Année</i>	<i>Paiements</i>	<i>PSAP</i>	<i>Paiements antérieurs</i>	<i>Charge totale estimée</i>
n	40	60	0	100
$n+1$	17	48	40	105
$n+2$	12	34	57	103
$n+3$	11	20	69	100
$n+4$	8	10	80	98
$n+5$	7	0	88	95

Dans l'exemple ci-dessus, la charge de sinistre totale de l'année de survenance n a été estimée successivement à 100, 105, 103, 100, 98 et enfin 95 (montant que l'on considère ici définitif). Au total, l'estimation d'origine de la provision pour sinistres à payer (60) s'est avérée suffisante pour payer l'ensemble des paiements ultérieurs ($17+12+11+8+7=55$) alors que certaines estimations intermédiaires ont pu laisser penser le contraire.

La liquidation d'une génération de sinistres donnée a un impact sur les charges de sinistres comptable des années suivantes. Ainsi, le *malus de liquidation* de première année de 5 a occasionné une charge de 5 dans les comptes de l'année $n+1$. A l'inverse, la charge de l'année $n+2$ a été allégée de 2 du fait du *bonus de liquidation* de l'année n au cours de cet exercice.

De façon plus générale, la charge de sinistre d'un exercice comptable peut se décomposer ainsi :

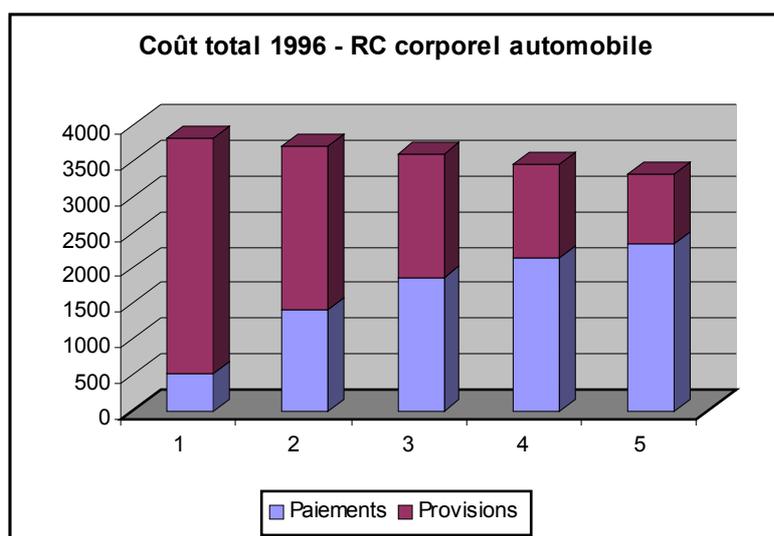
Charge comptable = charge de l'exercice courant – boni/mali sur antérieurs.

Dans les comptes annuels, l'évolution de la charge des sinistres peut être représenté ainsi :

	1997 et antérieurs	1998	1999	2002	2003	Total
Règlements de l'année 1999	20	10	14	17	40	101
Provisions au 31/12/1999	9	22	36	47	60	174
Provisions au 1/1/1999	30	34	50	59		173
Charge de provisions	-21	-12	14	-12	60	1
Boni (+) / mali (-)	1	2	0	-5		-2

Charge comptable = règlements de l'exercice (101) + charge des provisions (1) = 102 peut se réécrire Charge comptable = charge de l'exercice (100) + malus (2)

Cette approche n'est pas que théorique : l'exemple ci-dessous montre l'évolution de l'évaluation de la charge totale des sinistres de RC corporels automobile (marché français) de l'année 1996 au cours des années ultérieures.



Les méthodes d'évaluation

Le principe de base de l'évaluation des provisions de sinistres est l'évaluation par les gestionnaires de sinistres des sommes restant à payer dossier par dossier. Au montant ainsi obtenu, les sociétés doivent ajouter :

- une estimation pour "sinistres tardifs" (sinistres survenus dans l'année mais non encore déclarés – on utilise souvent l'abréviation anglaise IBNR : "incurred but not reported")
- une provision pour frais de gestion de sinistres internes (que les gestionnaires ne peuvent pas appréhender).

Parallèlement à l'évaluation des sommes restant à payer, les gestionnaires effectuent une estimation des recours à encaisser : les provisions pour sinistres à payer figurant au bilan sont les provisions nettes de recours à encaisser mais le détail des deux postes (provisions et recours à encaisser) figure en annexe des comptes.

Des méthodes statistiques sont utilisées :

- pour certaines branches, en substitution de l'évaluation dossier à dossier : il s'agit de branches à règlement rapide où les sinistres sont nombreux et de coût peu élevé – les méthodes statistiques s'appliquent bien et allègent les services de gestion de sinistres des évaluations répétitives. (Nota : la réglementation ne prévoit en fait qu'un cas : les sinistres non corporels d'assurance automobile, pour les deux derniers exercices de survenance).

- Pour d'autres branches, en complément de l'évaluation dossier à dossier : l'utilisation de méthodes statistiques permet de détecter d'éventuels biais systématiques dans la façon dont les services de gestion de sinistres évaluent les sinistres (ou tout autre type de défaillance). Les méthodes statistiques servent ici à contrôler, valider ou compléter les provisions déjà établies.

Les méthodes statistiques font généralement l'hypothèse que certaines caractéristiques des branches ou de la société restent constantes dans le temps. Ces méthodes peuvent être classées par familles selon l'hypothèse qui les fonde :

- Les méthodes de coût moyen font l'hypothèse que les cout moyens des sinistres sont prévisibles (évolution régulière, selon un indice externe etc.) : dès lors, il suffit de multiplier le nombre de sinistres de l'année (après avoir évalué le nombre de sinistres survenus mais non déclarés) par le coût moyen retenu pour l'année.
- Les méthodes de cadences de règlement reposent sur l'idée que le rythme des paiements, exprimé en pourcentage de la charge finale de sinistres, est stable d'une année de survenance à l'autre. Dès lors les paiements effectués suffisent à faire une évaluation des provisions pour sinistres à payer.
- Les méthodes liquidatives sont utilisées lorsque l'on a des raisons de penser que la liquidation d'une charge de sinistres présente toujours un profil du même type par suite d'habitudes permanentes des évaluateurs. On peut alors reproduire dans le futur les liquidations du passé.

Toutes ces méthodes ont des limites qu'il convient d'avoir toujours à l'esprit.

En premier lieu, ces méthodes doivent être appliquées à des ensembles de sinistres dont on aura ôté les sinistres trop élevés : les sinistres importants vont en effet créer des distorsions sur les coût moyens, les cadences de règlement et les profils de liquidation.

En deuxième lieu, toutes les méthodes sont sensibles à l'hypothèse selon laquelle les exercices de survenance anciens, qui servent de référence, sont exactement connus : une erreur dans la charge de sinistre d'un exercice ancien est démultipliée par les méthodes statistiques.

Enfin, chaque méthode dépend de la qualité de certains paramètres :

- ⇒ les méthodes de coût moyen sont sensibles à la qualité du dénombrement des sinistres (et à la permanence des conventions utilisées pour effectuer ce dénombrement).
- ⇒ Les méthodes de cadences doivent être utilisées avec précaution dans les branches à cadence de règlement lente : en effet, toute variation d'une cadence faible a des effets fortement amplifiés sur l'évaluation de la charge totale.
- ⇒ Les méthodes liquidatives sont généralement fiables ... tant que les procédures en vigueur dans les services de gestion des sinistres sont stables et respectées : elles seront donc impuissantes à détecter une erreur si celle-ci n'est pas habituelle.

Les deux méthodes non stochastiques les plus connues sont présentées ci-dessous.

méthode des cadences – Chain Ladder

Cette méthode est de loin la plus connue et la plus utilisée.

Ses deux principaux avantages sont sa simplicité et son ancienneté.

Simplicité : elle peut être appliquée facilement. Ce n'est pas la seule, mais l'expérience a conduit à la privilégier. En dépit de ses nombreux inconvénients théoriques, elle sert de benchmark pour comparer les autres méthodes.

Son origine n'est pas connue, mais semble remonter au moins aux années 60.

C'est une méthode généralement appliquée sur les paiements cumulés, notés $C_{i,j}$, où i est un indice représentant l'exercice de survenance et j un indice représentant la période de développement.

Les données disponibles sont représentées sous forme d'un triangle.

Exercice de survenance	1 ^{er} bilan	2 ^{ème} bilan	3 ^{ème} bilan	4 ^{ème} bilan
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	$C_{1,3}$	$C_{1,4}$
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	$C_{2,3}$	
3	$C_{3,1}$	$C_{3,2}$		
4	$C_{4,1}$			

L'hypothèse centrale de cette méthode est celle de la stabilité des cadences de paiements. Pour chaque exercice de déroulement, on cherche à déterminer un coefficient de passage f_j indépendant de i : $C_{i,j+1} = f_j C_{i,j}$

Celui-ci est estimé ainsi :
$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}}$$

Pour l'exercice de survenance i , le montant de la provision à constituer à la fin de l'année j est P_i tel que :

$$P_i = C_{i,j} \left(\prod_{l>=j} \hat{f}_l - 1 \right)$$

Application au C-triangle : Triangle de liquidation des coûts de sinistres cumulés						Provision
Année d'origine	Année de développement					
	1	2	3	4	5	
1	232,0	353,4	498,2	645,7	689,5	0,0
2	258,2	385,2	559,6	711,3		48,2
3	221,7	361,1	476,3			176,2
4	360,1	539,9				491,8
5	349,2					671,4

Coefficient de passage	152,9%	139,5%	128,3%	106,8%
Produit des coefficients	292,3%	191,1%	137,0%	106,8%

La méthode des cadences avec inflation

Cette variante de la méthode des cadence vise à prendre explicitement en compte l'inflation. Les paiements cumulés sont transformés en paiements annuels par différences des colonnes consécutives du triangle. Ces paiements annuels sont converti en euros constants par application d'un index d'inflation, puis cumulés pour obtenir un triangle de montant cumulés en francs constants.

La méthode des cadences est ensuite appliquée.

La méthode du ratio de paiement

Cette méthode attribuée à [Sawkins 1975] est identique à la méthode des cadences de développement avec inflation, la seule différence se situant dans le mode d'estimation des coefficient de passage f_j qui sont une moyenne de ratios et non un ratio de moyennes. :

$$\hat{f}_j = \frac{1}{n-j-1} \cdot \sum_{i=0}^{n-j-1} \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$$

Méthode de Bornhuetter-Ferguson

Cette méthode, probablement la plus connue des méthodes composites, doit son nom à l'article The Actuary and IBNR publié en 1972 et dont les auteurs étaient Ronald Bornhuetter et Ronald Ferguson.

Elle a été élaborée pour évaluer le coût des tardifs, mais son principe peut être appliqué plus généralement.

Elle suppose que l'on dispose d'une information externe sur la valeur probable finale du coût total des sinistres, que l'on appelle A, et que l'on connaisse la proportion de sinistres attendus.

Cette méthode se formule alors ainsi :

$$L = D \frac{1}{LDF} + A \left[1 - \frac{1}{LDF} \right]$$

avec :

L = coût total estimé par cette méthode.

D = coût total estimé en fonction des sinistres connues.

A = coût total (connus + tardifs) attendu a priori.

LDF = proportion de la liquidation déjà constatée.

Par exemple, supposons que le tarif ait été établi en anticipant une sinistralité totale de 80, que la proportions des sinistres connus au premier bilan soit habituellement de 30% et que la sinistralité constatée au premier bilan soit de 30.

Si l'on considère que le tarif était correctement établi, il n'y a pas lieu de remettre en cause la sinistralité totale et le montant des tardifs à provisionner est de $80 - 30 = 50$.

Si l'on considère que la proportion de sinistres connus au premier bilan est un indicateur fiable, il y a lieu de considérer que la sinistralité totale sera de $30/30\% = 100$ et de provisionner 70 de tardifs.

L'application de la méthode Bornhuetter-Ferguson donne un résultat intermédiaire calculé ainsi :

$$L = 100 \times 30\% + 80 \times 70\% = 86, \text{ soit un volume de tardifs attendu de } 56.$$

Une opinion exprimée par plusieurs auteurs considère cette méthode comme plus performante que la méthode des cadences de développement, en début de développement.